

CFM 2013

Notes sur le modèle d'enveloppe d'ellipses pour la  
propagation des feux de végétation

DIDIER BERNARDIN ET OLIVIER SÉRO-GUILLAUME  
L.E.M.T.A. (NANCY)

## Introduction

Deux classes de modèles de propagation.

1. Modèles géométriques qui modélisent directement le déplacement du front à "grande" échelle.
2. Modèles de bilans locaux qui modélisent à plus petites échelles les échanges de chaleur, de masse et de quantité de mouvement.

Deux types de modèles géométriques :

1. R.O.S donné (c.f. BEHAVE+)
2. Modèles d'enveloppe d'ellipses (c.f. FARSITE)

⇒ **On revisite ici le modèle d'enveloppe.**

## Plan

1. Equations intrinsèques de la propagation du front par la "théorie des enveloppes".  
Expression de la vitesse normale.
2. Forme explicite de la solution pour les cas simples.  
Analyse explicite des limitations du modèle. Exemples.
3. Reformulation des équations de propagation en un système de 4 EDOs.

# Principe

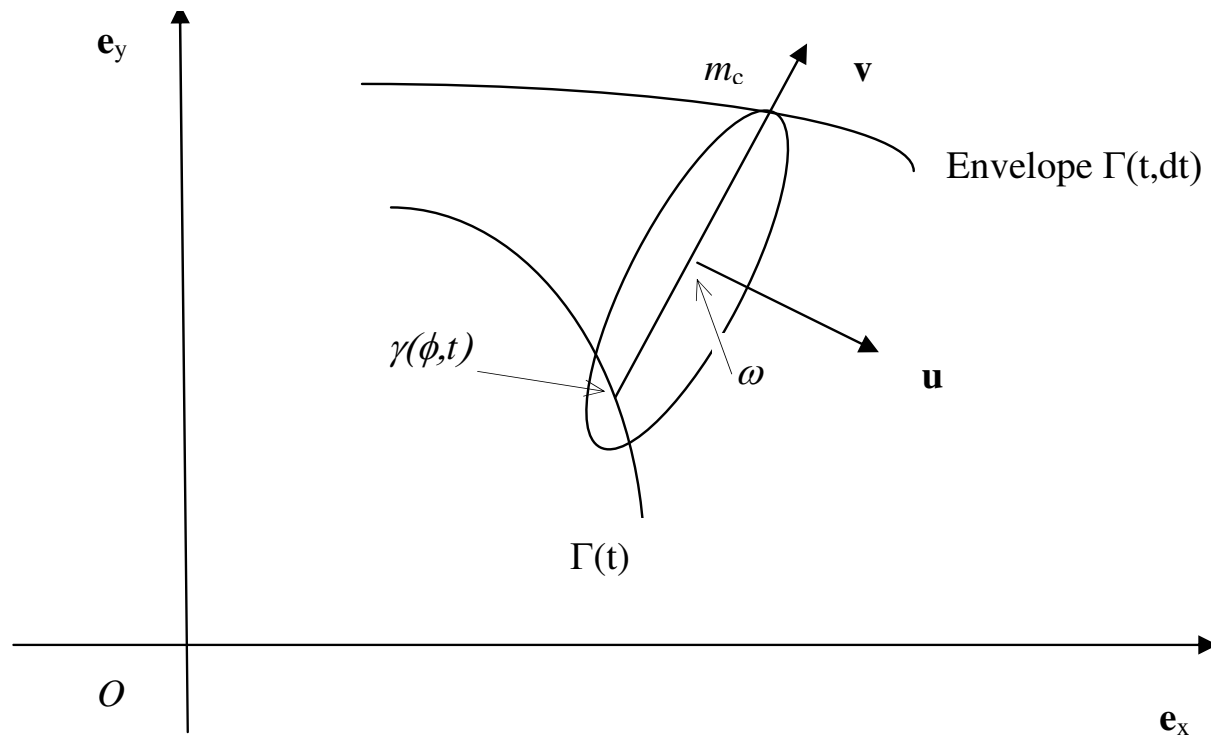


FIGURE 1 – Propagation by envelope of ellipses.

## Paramètres des ellipses.

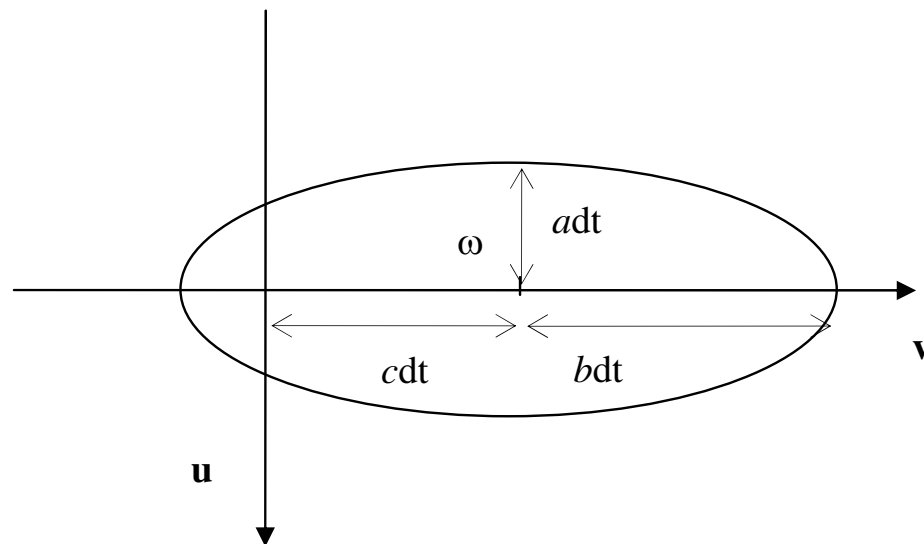


FIGURE 2 – Definition of the parameters of ellipses.

## Corrélations empiriques usuelles.

Vitesse du vent :  $\mathbf{W} = \|\mathbf{W}\|\mathbf{w}$  (vent libre ou à mi-flamme).

$$R = R_0(1 + \Phi_W(U) + \Phi_S(\varphi))$$

On pose :

$$e = b/a, \quad x \stackrel{def}{=} 1/(e + \sqrt{e^2 - 1})$$

FARSITE2004, Alexander1985, Anderson1982 :

$$e = 0.936 \exp(\alpha_0 U) + 0.461 \exp(-\alpha_1 U) - 0.397$$

$$b = R(1 + x^2)/2 \quad c = R(1 - x^2)/2 \quad (\text{note : } c^2 - b^2 = a^2)$$

**En absence de pente locale ( $\varphi = 0$ ).**

$$U = \|\mathbf{W}\| \quad \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

**En présence de pente locale ( $\varphi \neq 0$ ).**

$$\Phi_W(U_S) = \Phi_S(\varphi) \quad \mathbf{W}' = \mathbf{W} + U_S \mathbf{s}$$

$$U = \|\mathbf{W}'\| \quad \mathbf{v} = \mathbf{W}' / \|\mathbf{W}'\|$$

## Enveloppes de courbes planes.

Soit  $(\Gamma_\phi)_{\{\phi \in \mathbb{R}\}}$  une famille à un paramètre  $\phi$  de courbes planes assez régulières. On dit qu'une courbe plane  $\Gamma$  est *enveloppe de la famille*  $(\Gamma_\phi)_{\{\phi \in \mathbb{R}\}}$  si pour chaque point  $M$  de  $\Gamma$  :

1. Il existe  $\phi_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $M \in \Gamma_{\phi_0}$ .
2. Il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $\phi_0$  et une paramétrisation locale  $(I, g)$  de  $\Gamma$  au voisinage de  $M$  telle que :
  - (a) pour chaque  $\phi \in I$ ,  $g(\phi)$  soit sur  $\Gamma_\phi$ .
  - (b)  $\Gamma$  et  $\Gamma_\phi$  soient tangentes en  $g(\phi)$ .

## Enveloppes de courbes planes.

Soit  $(\Gamma_\phi)_{\{\phi \in \mathbb{R}\}}$  une famille à un paramètre  $\phi$  de courbes planes assez régulières. On dit qu'une courbe plane  $\Gamma$  est *enveloppe de la famille*  $(\Gamma_\phi)_{\{\phi \in \mathbb{R}\}}$  si pour chaque point  $M$  de  $\Gamma$  :

1. Il existe  $\phi_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $M \in \Gamma_{\phi_0}$ .
2. Il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $\phi_0$  et une paramétrisation locale  $(I, g)$  de  $\Gamma$  au voisinage de  $M$  telle que :
  - (a) pour chaque  $\phi \in I$ ,  $g(\phi)$  soit sur  $\Gamma_\phi$ .
  - (b)  $\Gamma$  et  $\Gamma_\phi$  soient tangentes en  $g(\phi)$ .

$$\forall \phi \in \mathbb{R} : \quad \Gamma_\phi = \{M \in P; F(M, \phi) = 0\}$$

$$\forall \phi \in I : \quad F(g(\phi), \phi) = 0$$



## Enveloppes de courbes planes.

Soit  $(\Gamma_\phi)_{\{\phi \in \mathbb{R}\}}$  une famille à un paramètre  $\phi$  de courbes planes assez régulières. On dit qu'une courbe plane  $\Gamma$  est *enveloppe de la famille*  $(\Gamma_\phi)_{\{\phi \in \mathbb{R}\}}$  si pour chaque point  $M$  de  $\Gamma$  :

1. Il existe  $\phi_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $M \in \Gamma_{\phi_0}$ .
2. Il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $\phi_0$  et une paramétrisation locale  $(I, g)$  de  $\Gamma$  au voisinage de  $M$  telle que :
  - (a) pour chaque  $\phi \in I$ ,  $g(\phi)$  soit sur  $\Gamma_\phi$ .
  - (b)  $\Gamma$  et  $\Gamma_\phi$  soient tangentes en  $g(\phi)$ .

$$\forall \phi \in \mathbb{R} : \quad \Gamma_\phi = \{M \in P; F(M, \phi) = 0\}$$

$$\forall \phi \in I : \quad F(g(\phi), \phi) = 0$$

$$\implies \forall \phi \in I : \quad (\nabla F(g(\phi), \phi) | g'(\phi)) + \frac{\partial F}{\partial \phi}(g(\phi), \phi) = 0$$

## Application à la propagation.

$$\text{Équation Caractéristique de } \Gamma : \begin{cases} F(M, \phi) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \phi}(M, \phi) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Dans notre cas on a, l'instant  $t$  pour la durée  $dt$ , la famille d'ellipses  $(E_\phi(t, dt))_{\{\phi \in \mathbb{R}\}}$  :

$$E_\phi(t, dt) = \left\{ M \in P; \frac{(\overrightarrow{\omega(\phi, t, dt)M} | \mathbf{u})^2}{a^2} + \frac{(\overrightarrow{\omega(\phi, t, dt)M} | \mathbf{v})^2}{b^2} = dt^2 \right\}$$

où :

$$\omega(\phi, t, dt) = \gamma(\phi, t) + c\mathbf{v}dt$$

Si on note  $M(\phi, t, dt) = g(\phi)$  la solution de (1) on a donc :

$$\mathbf{V}(\phi, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\gamma(\phi, t)M(\phi, t, dt)}}{dt}$$

## Équation de la propagation.

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\phi, t) = \mathbf{V}(\epsilon \frac{\partial \gamma}{\partial \phi}(\phi, t), \gamma(\phi, t), t) \\ \gamma(\phi, 0) = \gamma_0(\phi) \end{cases} \quad (\phi \in I, t \geq 0)$$

où  $(\epsilon = \pm 1)$  :

$$\begin{cases} (\mathbf{V}|\mathbf{u}) = \epsilon a^2 \frac{(\partial_\phi \gamma|\mathbf{v})}{\sqrt{a^2 (\partial_\phi \gamma|\mathbf{v})^2 + b^2 (\partial_\phi \gamma|\mathbf{u})^2}} \\ (\mathbf{V}|\mathbf{v}) = c - \epsilon b^2 \frac{(\partial_\phi \gamma|\mathbf{u})}{\sqrt{a^2 (\partial_\phi \gamma|\mathbf{v})^2 + b^2 (\partial_\phi \gamma|\mathbf{u})^2}} \end{cases}$$

## Équation de la propagation.

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\phi, t) = \mathbf{V}(\epsilon \frac{\partial \gamma}{\partial \phi}(\phi, t), \gamma(\phi, t), t) \\ \gamma(\phi, 0) = \gamma_0(\phi) \end{cases} \quad (\phi \in I, t \geq 0)$$

où  $(\epsilon = \pm 1)$  :

$$\begin{cases} (\mathbf{V}|\mathbf{u}) = \epsilon a^2 \frac{(\partial_\phi \gamma|\mathbf{v})}{\sqrt{a^2 (\partial_\phi \gamma|\mathbf{v})^2 + b^2 (\partial_\phi \gamma|\mathbf{u})^2}} \\ (\mathbf{V}|\mathbf{v}) = c - \epsilon b^2 \frac{(\partial_\phi \gamma|\mathbf{u})}{\sqrt{a^2 (\partial_\phi \gamma|\mathbf{v})^2 + b^2 (\partial_\phi \gamma|\mathbf{u})^2}} \end{cases}$$

$$(\mathbf{V}|\mathbf{n})\mathbf{n} = \epsilon [\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)(\mathbf{v}|\mathbf{n})^2} + \epsilon c(\mathbf{v}|\mathbf{n})]\mathbf{n}$$

On a donc :

$$\text{R.O.S.}_{def} = |(\mathbf{V}|\mathbf{n})| = \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)(\mathbf{v}|\mathbf{n})^2} + \epsilon c(\mathbf{v}|\mathbf{n}) \quad (\text{modèle d'enveloppe})$$

## Résolution quand $a, b, v$ Csts.

Principe : transformer  $\Gamma(t)$  en une courbe  $\Delta(t)$  qui évolue à vitesse normale constante.

$$e = b/a \quad [\mathbf{F}]_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e & 0 \end{bmatrix}$$

$$M \mapsto \mathcal{F}(t)(M) = O - \left[ \left( \int_0^t c(s) ds \right) \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{Om} \right] / \sqrt{1 + e^2}$$

Si  $\Delta(t) = \mathcal{F}(t)(\Gamma(t))$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial t}(\phi, t) = \epsilon \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{N}(\delta(\phi, t)) \\ \delta(\phi, 0) = \delta_0(\phi) \end{cases} \quad (\phi \in I, t \geq 0) \quad (2)$$

## Résolution quand $a, b, v$ Csts (suite).

**Théorème 1** Soit  $a > 0, b > 0, \epsilon \in \{-1, 1\}$  donnés,  $\Delta_0$  une courbe simple fermée de classe  $C^2$  et  $\phi \in I \mapsto \delta_0(\phi)$  un paramétrage  $C^2$  de  $\Delta_0$ . Alors, le problème (2) possède une unique solution maximale définie par

$$(\phi, t) \in I \times [0, T_{max}[ \mapsto \delta(\phi, t) = \delta_0(\phi) + \epsilon \frac{abt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{N}_0(\delta_0(\phi)) \quad (3)$$

où  $m \in \Delta_0 \mapsto \mathbf{N}_0(m)$  est le champ des normales unitaires extérieures à  $\Delta_0$  et où  $T_{max} > 0$  est la borne supérieure des  $t > 0$  tels que la fonction  $\phi \mapsto \delta(\phi, t)$  donnée par (3) soit un paramétrage d'une courbe simple fermée de classe  $C^1$ .

## Résolution quand $a, b, \mathbf{v}$ Csts (suite).

**Théorème 1** Soit  $a > 0, b > 0, \epsilon \in \{-1, 1\}$  donnés,  $\Delta_0$  une courbe simple fermée de classe  $C^2$  et  $\phi \in I \mapsto \delta_0(\phi)$  un paramétrage  $C^2$  de  $\Delta_0$ . Alors, le problème (2) possède une unique solution maximale définie par

$$(\phi, t) \in I \times [0, T_{max}[ \mapsto \delta(\phi, t) = \delta_0(\phi) + \epsilon \frac{abt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{N}_0(\delta_0(\phi)) \quad (3)$$

où  $m \in \Delta_0 \mapsto \mathbf{N}_0(m)$  est le champ des normales unitaires extérieures à  $\Delta_0$  et où  $T_{max} > 0$  est la borne supérieure des  $t > 0$  tels que la fonction  $\phi \mapsto \delta(\phi, t)$  donnée par (3) soit un paramétrage d'une courbe simple fermée de classe  $C^1$ .

$$\Gamma(t) = \mathcal{F}(t)(\Delta(t)) = \Gamma_0 + \left( \int_0^t c(s) ds \right) \mathbf{v} + \epsilon at \frac{\mathbf{n}_0 + (e^2 - 1)(\mathbf{n}_0 | \mathbf{v}) \mathbf{v}}{\sqrt{1 + (e^2 - 1)(\mathbf{n}_0 | \mathbf{v})^2}}$$

## Cas $a, b, v$ Csts. Caractérisation de $T_{max}$ .

Si  $T_{max} < +\infty$  :

1. Soit il existe un temps  $t > 0$  tel que l'application  $\phi \mapsto \delta(\phi, t)$  donnée par (3) possède un point critique, c'est à dire qu'il existe  $\phi$  tel que  $\partial_\phi \delta(\phi, t) = 0$ .

$$0 = \frac{\partial \delta}{\partial \phi}(\phi, t) = \left[1 + \epsilon \frac{abt}{\sqrt{a^2 + b^2}} C_0(\delta(\phi))\right] \frac{\partial \delta_0}{\partial \phi}(\phi) \Rightarrow 1 + \epsilon \frac{abt}{\sqrt{a^2 + b^2}} C_0(\delta(\phi)) = 0$$

2. Soit il existe un temps  $t > 0$  tel que l'application  $\phi \mapsto \delta(\phi, t)$  donnée par (3) possède un point double, c'est à dire qu'il existe  $(\phi_1, \phi_2)$  tel que  $\delta(\phi_1, t) = \delta(\phi_2, t)$  alors que  $\delta_0(\phi_1) \neq \delta_0(\phi_2)$ .

D'où :

$$\epsilon = 1 : \quad \mathbf{T}_{\max} = +\infty \iff \text{Int}(\Gamma_0) \text{ convexe.}$$

$$\epsilon = -1 : \quad \mathbf{T}_{\max} < +\infty.$$



## Cas $a, b, v$ Csts. Illustrations.

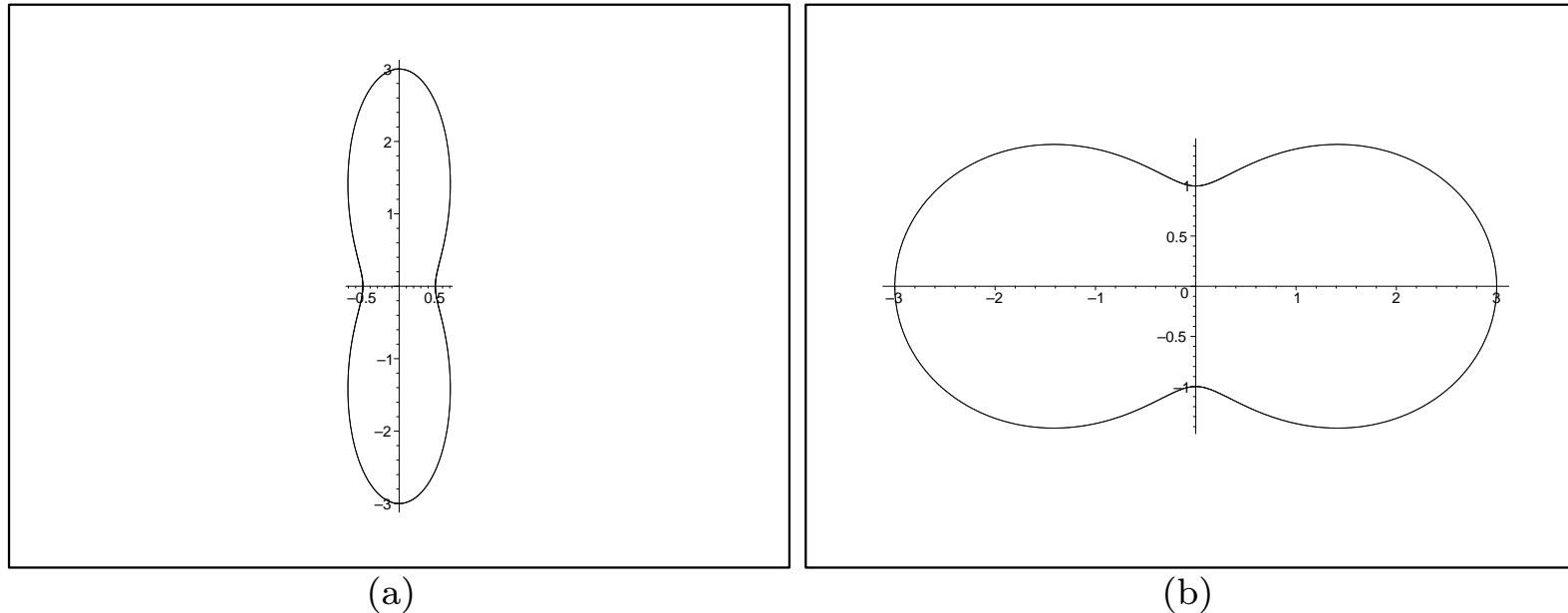


FIGURE 3 – Example of an initial front that encloses a non convex domain. 3(a) :  $\Gamma_0$ , Unit length of the figure =  $L$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x$ ,  $e = 2$ . 3(b) :  $\Delta_0$ , Unit length of the figure =  $aL$ .

$$\epsilon = 1 : T_{max}^+ = \frac{aL}{3ab} = \frac{L}{3b} \quad \epsilon = -1 : T_{max}^- = \frac{aL}{3ab} = \frac{L}{b}$$

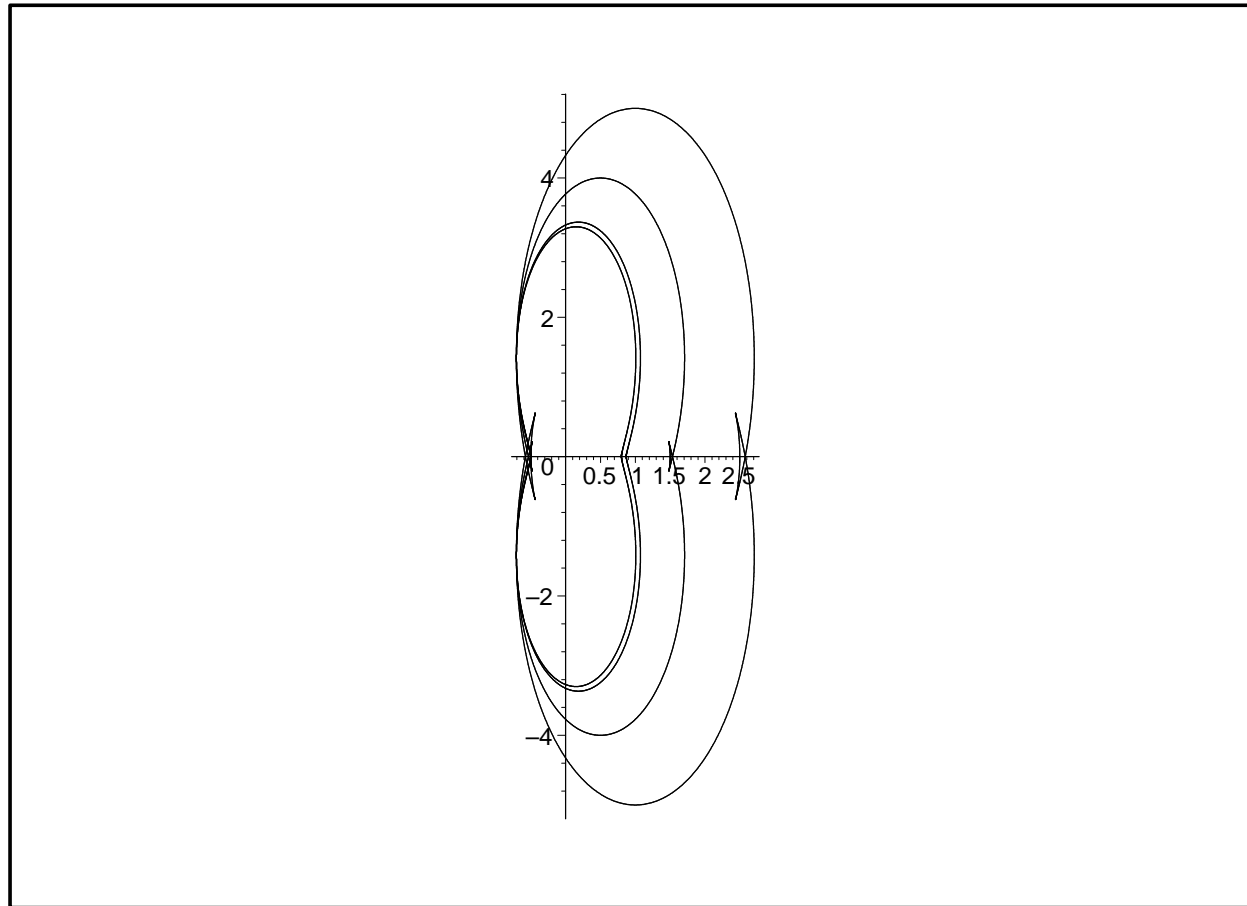


FIGURE 4 – Positions of the forward front envelope at  $t = 0.9T_{max}, 1.1T_{max}, 3T_{max}, 6T_{max}$  for  $e = 2$  and  $c = a\sqrt{e^2 - 1}$ . Unit length of the figure =  $L$ .

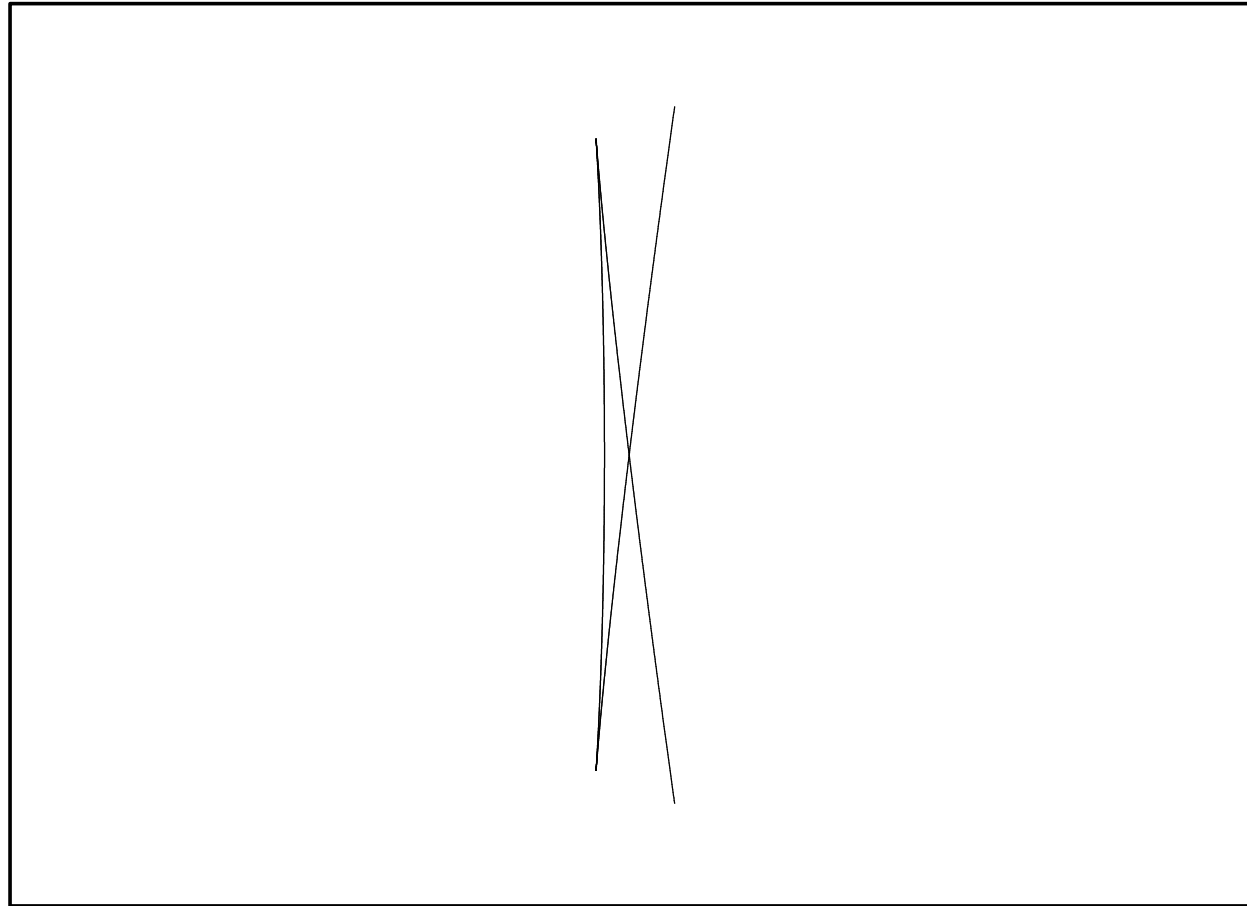


FIGURE 5 – Zoom on the rightmost singularity for  $t = 1.1T_{max}$  ( $\phi \approx 3\pi/2$ ).

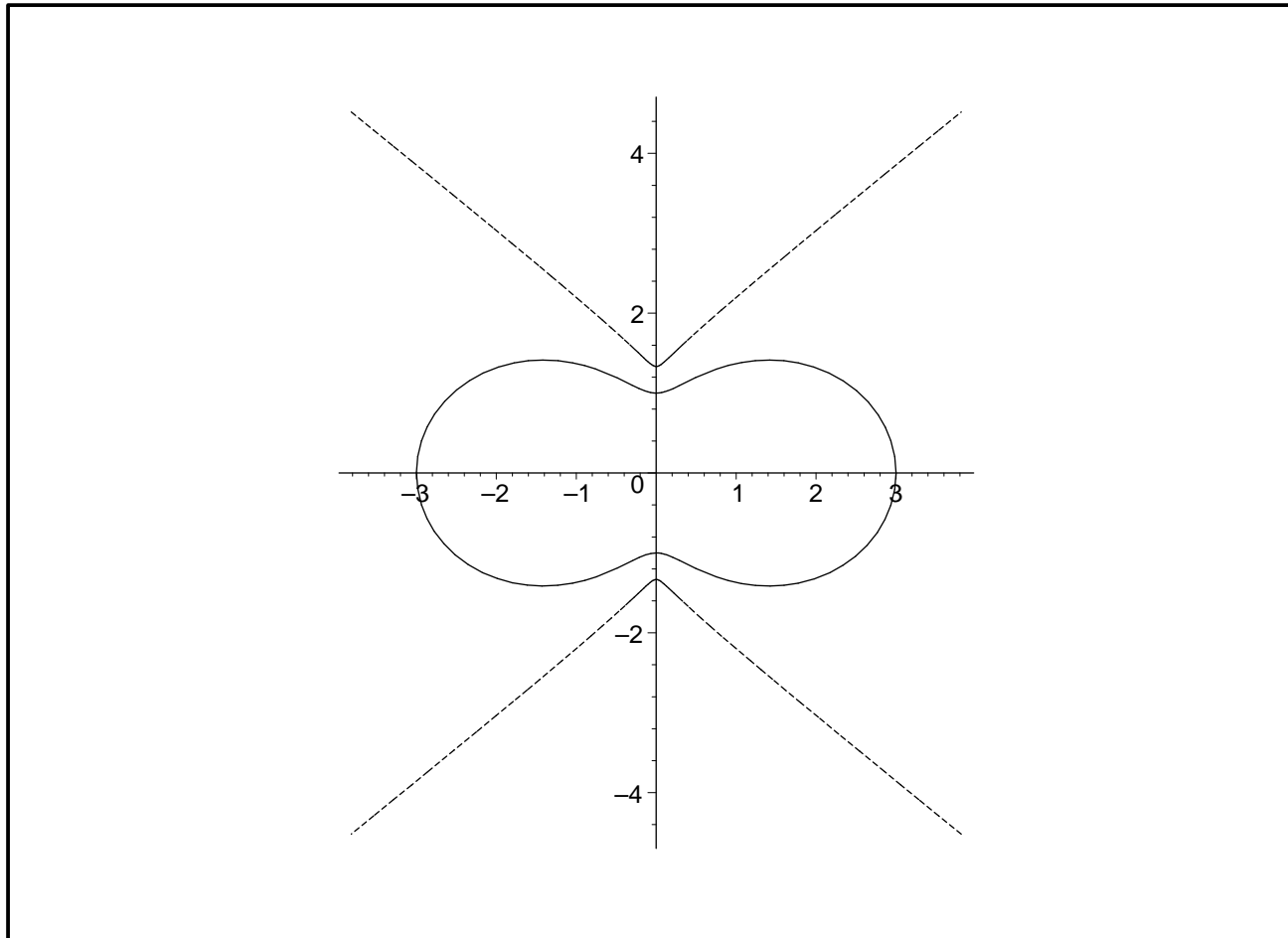


FIGURE 6 – External caustic (dotted lines) in the neighborhood of  $\Delta_0$ .

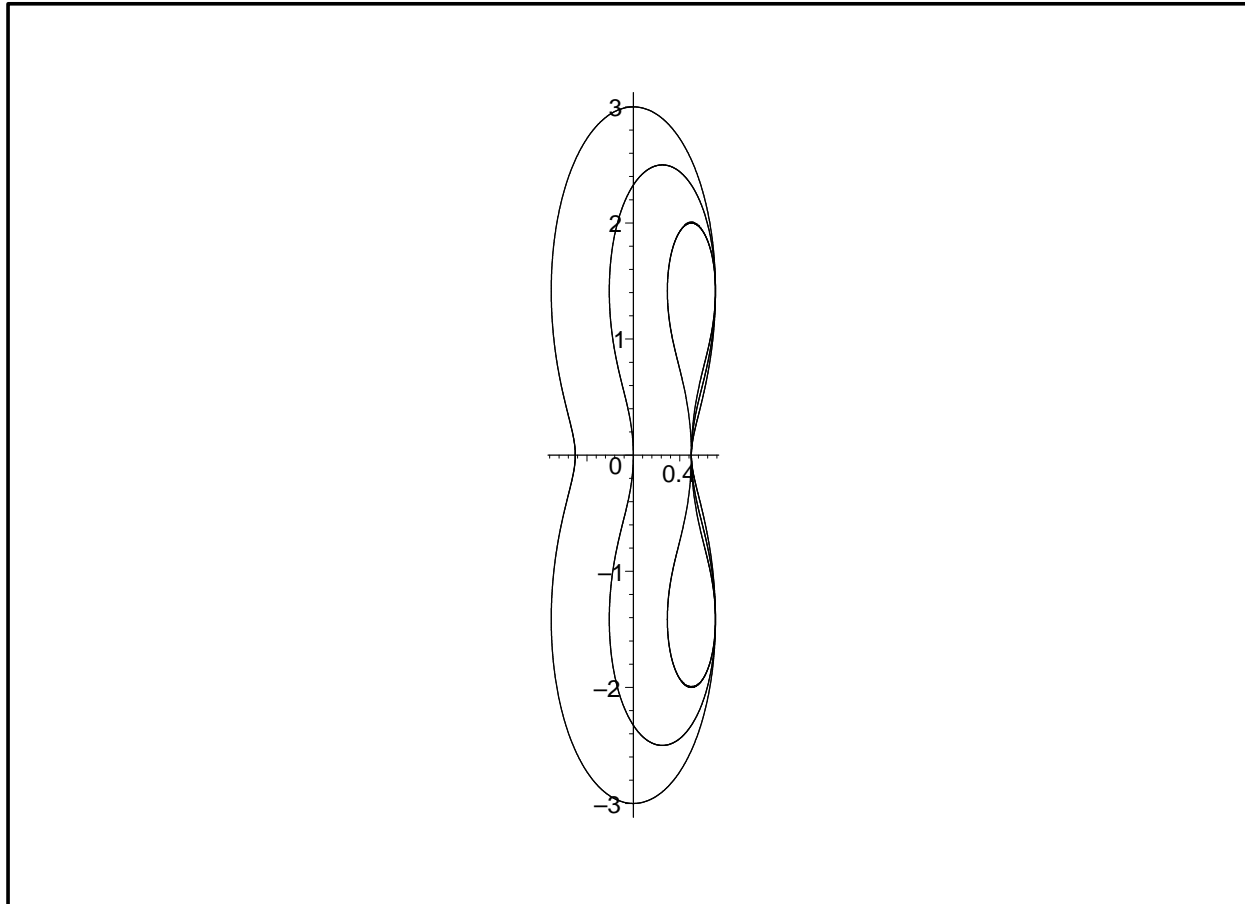


FIGURE 7 – Positions of the backward front envelope at  $t = 0, 0.5T_{max}, T_{max}$  for  $e = 2$  and  $c = a\sqrt{e^2 - 1}$ . Unit length of the figure =  $L$ .

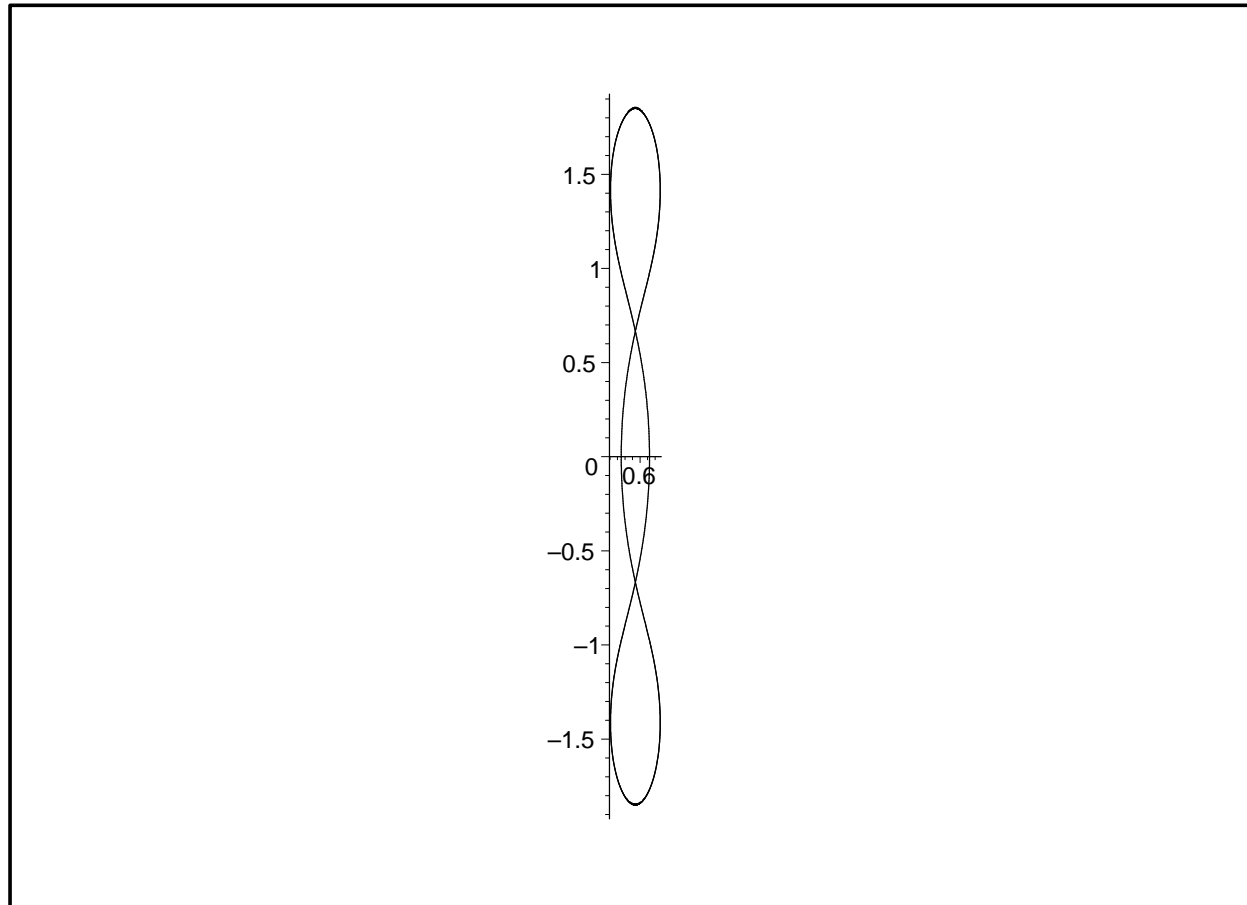


FIGURE 8 – Position of the backward front at  $t = 1.15T_{max}$ .

## Équation de la propagation. Reformulation en EDOs

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\phi, t) = c\mathbf{v} + \epsilon a \frac{(\mathbf{u}|\mathbf{n})\mathbf{u} + e^2(\mathbf{v}|\mathbf{n})\mathbf{v}}{\sqrt{1 + (e^2 - 1)(\mathbf{v}|\mathbf{n})^2}} \\ \gamma(\phi, 0) = \gamma_0(\phi) \end{cases} \quad \text{où } \mathbf{t} = \frac{\partial_\phi \gamma}{\|\partial_\phi \gamma\|}, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{t}, \quad e = \frac{b}{a}$$

## Équation de la propagation. Reformulation en EDOs

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\phi, t) = c\mathbf{v} + \epsilon a \frac{(\mathbf{u}|\mathbf{n})\mathbf{u} + e^2(\mathbf{v}|\mathbf{n})\mathbf{v}}{\sqrt{1 + (e^2 - 1)(\mathbf{v}|\mathbf{n})^2}} \\ \gamma(\phi, 0) = \gamma_0(\phi) \end{cases} \quad \text{où } \mathbf{t} = \frac{\partial_\phi \gamma}{\|\partial_\phi \gamma\|}, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{t}, \quad e = \frac{b}{a}$$

Forme plus compacte :

$$\mathbf{F} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - e\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \quad \mathbf{z} = \epsilon^T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} / \sqrt{1 + (e^2 - 1)(\mathbf{v}|\mathbf{n})^2}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(\phi, t) = c\mathbf{v} + a\mathbf{F} \cdot \mathbf{z}$$



## Équation de la propagation. Reformulation en EDOs

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\phi, t) = c\mathbf{v} + \epsilon a \frac{(\mathbf{u}|\mathbf{n})\mathbf{u} + e^2(\mathbf{v}|\mathbf{n})\mathbf{v}}{\sqrt{1 + (e^2 - 1)(\mathbf{v}|\mathbf{n})^2}} \\ \gamma(\phi, 0) = \gamma_0(\phi) \end{cases} \quad \text{où } \mathbf{t} = \frac{\partial_\phi \gamma}{\|\partial_\phi \gamma\|}, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{t}, \quad e = \frac{b}{a}$$

Forme plus compacte :

$$\mathbf{F} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - e\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \quad \mathbf{z} = \epsilon^T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} / \sqrt{1 + (e^2 - 1)(\mathbf{v}|\mathbf{n})^2}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(\phi, t) = c\mathbf{v} + a\mathbf{F} \cdot \mathbf{z}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = \frac{1}{\|\partial_\phi \gamma\|^2} \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \middle| \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} = - \frac{1}{\|\partial_\phi \gamma\|} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \middle| \mathbf{n} \right) \mathbf{t} \quad (4)$$

## Équation de la propagation. Reformulation en EDOs

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\phi, t) = c\mathbf{v} + \epsilon a \frac{(\mathbf{u}|\mathbf{n})\mathbf{u} + e^2(\mathbf{v}|\mathbf{n})\mathbf{v}}{\sqrt{1 + (e^2 - 1)(\mathbf{v}|\mathbf{n})^2}} \\ \gamma(\phi, 0) = \gamma_0(\phi) \end{cases} \quad \text{où } \mathbf{t} = \frac{\partial_\phi \gamma}{\|\partial_\phi \gamma\|}, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{t}, \quad e = \frac{b}{a}$$

Forme plus compacte :

$$\mathbf{F} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - e\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \quad \mathbf{z} = \epsilon^T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} / \sqrt{1 + (e^2 - 1)(\mathbf{v}|\mathbf{n})^2}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(\phi, t) = c\mathbf{v} + a\mathbf{F} \cdot \mathbf{z}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = \frac{1}{\|\partial_\phi \gamma\|^2} \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \middle| \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} = - \frac{1}{\|\partial_\phi \gamma\|} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \middle| \mathbf{n} \right) \mathbf{t} \quad (4)$$

$$\|\mathbf{z}\| = 1 \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{R} \cdot {}^T \mathbf{F} = e\mathbf{R}$$

On calcule alors  $\partial_\phi(\partial_t \gamma)$  et on projette sur  $\mathbf{n}$ .

Comme le vecteur  $\mathbf{z}$  est unitaire, il existe un réel  $r$  tel que :  $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi} = r\mathbf{R} \cdot \mathbf{z}$ . Donc, puisque  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{R} \cdot {}^T \mathbf{F} = e\mathbf{R}$ , dans la projection le terme en  $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi}$  disparaît.

## Équation de la propagation. Reformulation en EDOs

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = -\frac{1}{\|\partial_\phi \gamma\|} \left[ \left( \frac{\partial c\mathbf{v}}{\partial \phi} \middle| \mathbf{n} \right) + \left( \frac{\partial a\mathbf{F}}{\partial \phi} \cdot \mathbf{z} \middle| \mathbf{n} \right) \right] \mathbf{t}$$

On note alors, comme d'habitude,  $\nabla_x$  les différentielles spatiales des fonctions des paramètres  $\mathbf{v}, a, b, c$ . On fixe  $\phi$ , on pose  $x = \gamma(\phi, t)$ ,  $\mathbf{y} = \epsilon \mathbf{n}(\gamma(\phi, t))$  et le couple  $(x, \mathbf{y})$  est donc solution du problème de cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c\mathbf{v} + a(\mathbf{y} + (e^2 - 1)(\mathbf{v}|\mathbf{y})\mathbf{v}) / \sqrt{1 + (e^2 - 1)(\mathbf{v}|\mathbf{y})^2} \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} = [(\nabla_x(c\mathbf{v}) \cdot \mathbf{R}\mathbf{y}|\mathbf{y}) + \frac{(\nabla_x(a\mathbf{F}) \cdot \mathbf{R}\mathbf{y} \cdot (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{y})|\mathbf{y})}{\sqrt{1 + (e^2 - 1)(\mathbf{v}|\mathbf{y})^2}}] \mathbf{R}\mathbf{y} \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} x(0) = \gamma_0(\phi) \\ \mathbf{y}(0) = \epsilon \mathbf{n}_0(\gamma_0(\phi)) \end{cases}$$