

# Calcul du rayonnement par la méthode des ordonnées discrètes

par Maxime Mense, Matthieu De Gennaro, et Bernard Porterie

Aix Marseille Université, CNRS, IUSTI UMR 7343, 13453 Marseille, France

## Avant-propos

La méthode des ordonnées discrètes est décrite en détail dans les ouvrages de base en rayonnement (Siegel et Howell, Modest, Brewster) et le cours de Denis Lemonnier (ENSMA) dont sont extraites les figures 1 à 4.

## Introduction

Cette méthode a été proposée par Chandrasekhar en 1960 pour traiter le rayonnement atmosphérique et stellaire, puis développée par Carlson et Lathrop en neutronique et enfin introduite par Fiveland dans le domaine du transfert de chaleur radiatif.

Elle est basée sur une représentation discrète de l'espace angulaire en un nombre  $M$  de directions le long desquelles on résout l'Equation de Transfert Radiatif (ETR). Ainsi en un point du domaine, on obtient  $M$  valeurs de luminances. L'évaluation de la source radiative locale et du flux radiatif s'obtient en remplaçant les intégrales sur l'angle solide par des quadratures numériques.

## Relations générales

L'ETR pour un milieu absorbant-émettant-diffusant s'écrit:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla L(P, \boldsymbol{\Omega}) + \beta L(P, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa L^0(T_p) + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} L(P, \boldsymbol{\Omega}') \Phi(P, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \quad (1)$$

où

$L(P, \Omega)$ : luminance en  $P$  dans la direction  $\Omega$ .

$L^0(T_P) = \sigma T_P^4 / \pi$ : émission du corps noir à la température  $T_P$  (hypothèse d'un milieu gris).

$\Phi$ : fonction de phase satisfait:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi(P, \Omega, \Omega') d\Omega' = 1$$

En cas de diffusion isotrope:  $\Phi = 1$ .

L'ETR est soumise, dans le cas d'une paroi grise diffuse, à émission et réflexion isotropes, à la condition à la limite suivante en un point  $P_w$ :

$$L(P_w, \Omega) = \varepsilon L^0(T_{P_w}) + \frac{1-\varepsilon}{\pi} \int_{\Omega' \cdot \mathbf{n} < 0} L(P_w, \Omega') |\Omega' \cdot \mathbf{n}| d\Omega' \quad (2)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale intérieure au domaine.

## Principe général de la méthode

Dans la méthode des ordonnées discrètes, l'ETR (1) est résolue pour  $M$  directions  $\Omega_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  et les intégrales sur l'angle solide sont remplacées par des quadratures numériques, à savoir:

$$\int_{4\pi} f(\Omega) d\Omega \approx \sum_{m=1}^M w_m f(\Omega_m) = \sum_{m=1}^M w_m f_m \quad (3)$$

où les  $w_m$  sont les poids des quadratures associées aux directions  $\Omega_m$ .

La méthode des Ordonnées Discrètes consiste à:

1) résoudre l'ETR dans chacune des directions  $m$ :

$$\Omega_m \cdot \nabla L_m(P) + \beta L_m(P) = \kappa L^0(T_P) + \frac{\sigma_s}{4\pi} \sum_{m'=1}^M w_{m'} L_{m'}(P) \Phi_{mm'}(P) \quad (4)$$

assujettie à la condition à la limite:

$$L_m(P_w) \approx \varepsilon L^0(T_{P_w}) + \frac{1-\varepsilon}{\pi} \sum_{m' \text{ tq } \Omega_{m'} \cdot \mathbf{n} < 0} w_{m'} L_{m'}(P_w) |\Omega_{m'} \cdot \mathbf{n}| \quad (5)$$

2) Après avoir déterminé les luminances en tout point du domaine, le flux radiatif à l'intérieur du volume ou à la surface peut être calculé à partir de sa définition:

$$\mathbf{q}_R = \int_{4\pi} L(P, \Omega) \Omega d\Omega \approx \sum_{m=1}^M w_m L_m(P) \Omega_m \quad (6)$$

La source radiative qui s'écrit après quelques calculs:

$$S_R = -div \mathbf{q}_R = \kappa (G - 4\sigma T^4) \quad (7)$$

nécessite le calcul du rayonnement incident:

$$G = \int_{4\pi} L(P, \Omega) d\Omega \approx \sum_{m=1}^M w_m L_m(P) \quad (8)$$

## Choix des directions et des quadratures

Le choix du schéma de quadrature est arbitraire, bien que des restrictions sur les directions et les poids peuvent apparaître si l'on désire préserver la symétrie par rapport à tout plan de coordonnées et l'invariance par toute rotation de  $90^\circ$  autour d'un des axes de coordonnées.

Il est courant de choisir un système de directions et de poids complètement symétriques qui satisfont les moments d'ordre 0, 1/2, 1 et 2:

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} d\Omega &= \sum_{m=1}^M w_m = 4\pi & (9) \\ \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} \Omega \cdot \mathbf{n} d\Omega &= \sum_{m \text{ tq } \Omega_m \cdot \mathbf{n} > 0} w_m \Omega_m \cdot \mathbf{n} = \beta \\ \int_{4\pi} \Omega d\Omega &= \sum_{m=1}^M w_m \Omega_m = \mathbf{0} \\ \int_{4\pi} \Omega \Omega d\Omega &= \sum_{m=1}^M w_m \Omega_m \Omega_m = \frac{4\pi}{3} \mathbf{ffi}, \text{ où } \mathbf{ffi}: \text{tenseur unité} \end{aligned}$$

où la direction  $\Omega_m$  est représentée par ses cosinus directeurs:  $\Omega_m (\mu_m, \eta_m, \xi_m)$ .

Les quadratures les plus courantes sont les quadratures  $S_N$ . L'ordre N de la quadrature correspond à un nombre total de directions:  $M = N(N+2)$ .

$S_2$ : 8 directions,  $S_4$ : 24 directions,  $S_6$ : 48 directions,  $S_8$ : 80 directions,...

La figure 1 donne les directions des quadratures  $S_4$  et  $S_6$  dans le premier octant. La table 1 regroupe les directions et poids des quadratures  $S_4$  et  $S_6$  dans ce premier octant.

## Mise en oeuvre en coordonnées cartésiennes

### Intégration de l'ETR sur un volume de contrôle

Par simplicité, on se limitera à des géométries cartésiennes bidimensionnelles.

Le domaine de calcul rectangulaire est découpé en mailles régulières de longueur  $\Delta x$  et de largeur  $\Delta y$ .

L'ETR s'écrit en conservant le terme de diffusion  $D_m$ :

$$\mu_m \frac{dL_m}{dx} + \eta_m \frac{dL_m}{dy} + \beta L_m = \kappa L^0 + D_m \quad (10)$$

En faisant référence aux points cardinaux comme l'indique la figure 2, son intégration sur un volume de contrôle conduit à (pour alléger l'écriture, nous omettrons l'indice m):

$$\mu \Delta y (L_E - L_W) + \eta \Delta x (L_N - L_S) + \beta L_P \Delta V = S_P \Delta V \quad (11)$$

avec  $\Delta V = \Delta x \Delta y$  et  $S_P = \kappa L^0 + D$ .

Considérons une direction pour laquelle  $\mu > 0$  et  $\eta > 0$ . Les luminances  $L_W$  et  $L_S$  sont connues alors que l'on cherche à déterminer les luminances  $L_E$ ,  $L_N$  et  $L_P$ . Des schémas d'interpolation sont utilisés pour relier ces luminances inconnues à celles connues:

$$\alpha = \frac{L_P - L_W}{L_E - L_W} = \frac{L_P - L_S}{L_N - L_S} \text{ où } \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \quad (12)$$

Schéma step d'ordre 1:  $\alpha = 1$  ( $L_P = L_E = L_N$ )

Schéma diamant d'ordre 2:  $\alpha = 1/2$  ( $2L_P = L_E + L_W = L_N + L_S$ )

Des relations (12), on extrait  $L_E$  et  $L_N$  que l'on remplace dans l'eq. (11), ce qui conduit à:

$$L_P = \frac{\frac{\mu \Delta y}{\alpha} L_W + \frac{\eta \Delta x}{\alpha} L_S + \Delta V S_P}{\frac{\mu \Delta y}{\alpha} + \frac{\eta \Delta x}{\alpha} + \beta \Delta V} \quad (13)$$

Après avoir calculé  $L_P$ , on déduit  $L_E$  et  $L_N$  des relations (12).

Une fois les luminances déterminées sur la maille  $(i, j)$ , on passe à la maille  $(i + 1, j)$  sachant que:  $L_W(i + 1, j) = L_E(i, j)$  ou est imposée par la condition à la limite ouest, et  $L_S(i + 1, j) = L_N(i + 1, j - 1)$  ou est imposée par la condition à la limite sud.

Si les cosinus directeurs ne sont pas positifs, le raisonnement précédent reste valable à la condition d'orienter les cellules suivant le sens de propagation (Figure 3).

Le balayage du domaine se fait en faisant varier  $j$  de  $J_1$  à  $J_2$  avec un incrément de  $k_j$ , puis pour chaque valeur de  $j$ , en faisant varier  $i$  de  $I_1$  à  $I_2$  avec un incrément de  $k_i$ , respectant les correspondances suivantes:

	$I_1$	$I_2$	$k_i$
$\mu > 0$	1	$i_{\max}$	+1
$\mu < 0$	$i_{\max}$	1	-1
	$J_1$	$J_2$	$k_j$
$\eta > 0$	1	$j_{\max}$	+1
$\eta < 0$	$j_{\max}$	1	-1

## Exemple d'un milieu à l'équilibre radiatif dans une cavité carrée

On se propose de calculer la température d'un milieu gris absorbant, non diffusant supposé être à l'équilibre radiatif dans une cavité de 1m x 1m (Figure 4). Les parois sont à la température  $T = 0$  à l'exception de la paroi ouest dont la température est à  $T_p$ .

La procédure est la suivante:

- 1) On réalise, à la première itération  $\nu = 1$ , une estimation de  $T_\nu$
- 2) On calcule par la MOD le rayonnement incident et les flux radiatifs
- 3) On calcule  $T_{\nu+1}$  solution de:

$$\kappa \left( G - 4\sigma T_{\nu+1}^4 \right) = 0 \iff T_{\nu+1} = \left( \frac{G}{4\sigma} \right)^{1/4}$$

- 4) Si  $|T_{\nu+1} - T_\nu| \leq \epsilon$ ,  $\epsilon$  étant la tolérance fixée au préalable, le calcul s'arrête.

Dans le cas contraire, on retourne à l'étape 2 avec, cette fois, la température  $T_{\nu+1}$ .

La figure 5 représente, pour différentes absorptions du milieu, les flux radiatifs normalisés à la paroi chaude calculée par la MOD en utilisant la quadrature  $S_6$ . Les résultats sont acceptables.

La figure 6 donne, pour  $\kappa = 1m^{-1}$ , le flux radiatif normalisé à la paroi haute en utilisant pour la quadrature  $S_6$  les schémas step et diamant. Les résultats sont ici moins bons:

- Le schéma diamant peut produire des luminances négatives conduisant à des oscillations parasites sur le flux.
- Le schéma step est plus stable mais moins précis.
- Les résultats obtenus sont sensibles à l'effet de rayon inhérent à la MOD et qui se traduit par des fluctuations du flux autour de la bonne solution.

Des solutions se trouvent dans la littérature pour palier ces inconvénients.

Ces inconvénients sont toutefois fortement atténués en transferts couplés, ce qui explique que le schéma diamant est encore très utilisé en transferts couplés.

-----S4-----				
M	MU	ETA	XI	POIDS
1	-0.9082483	-0.2958759	0.2958758	1.0471976
2	-0.9082483	0.2958759	0.2958758	1.0471976
3	-0.2958759	-0.9082483	0.2958758	1.0471976
4	-0.2958759	-0.2958759	0.9082483	1.0471976
5	-0.2958759	0.2958759	0.9082483	1.0471976
6	-0.2958759	0.9082483	0.2958758	1.0471976
7	0.2958759	-0.9082483	0.2958758	1.0471976
8	0.2958759	-0.2958759	0.9082483	1.0471976
9	0.2958759	0.2958759	0.9082483	1.0471976
10	0.2958759	0.9082483	0.2958758	1.0471976
11	0.9082483	-0.2958759	0.2958758	1.0471976
12	0.9082483	0.2958759	0.2958758	1.0471976

-----S6-----				
M	MU	ETA	XI	POIDS
1	-0.9656013	-0.1838670	0.1838670	0.3219034
2	-0.9656013	0.1838670	0.1838670	0.3219034
3	-0.6950514	-0.6950514	0.1838671	0.7252938
4	-0.6950514	-0.1838670	0.6950514	0.7252938
5	-0.6950514	0.1838670	0.6950514	0.7252938
6	-0.6950514	0.6950514	0.1838671	0.7252938
7	-0.1838670	-0.9656013	0.1838670	0.3219034
8	-0.1838670	-0.6950514	0.6950514	0.7252938
9	-0.1838670	-0.1838670	0.9656013	0.3219034
10	-0.1838670	0.1838670	0.9656013	0.3219034
11	-0.1838670	0.6950514	0.6950514	0.7252938
12	-0.1838670	0.9656013	0.1838670	0.3219034
13	0.1838670	-0.9656013	0.1838670	0.3219034
14	0.1838670	-0.6950514	0.6950514	0.7252938
15	0.1838670	-0.1838670	0.9656013	0.3219034
16	0.1838670	0.1838670	0.9656013	0.3219034
17	0.1838670	0.6950514	0.6950514	0.7252938
18	0.1838670	0.9656013	0.1838670	0.3219034
19	0.6950514	-0.6950514	0.1838671	0.7252938
20	0.6950514	-0.1838670	0.6950514	0.7252938
21	0.6950514	0.1838670	0.6950514	0.7252938
22	0.6950514	0.6950514	0.1838671	0.7252938
23	0.9656013	-0.1838670	0.1838670	0.3219034
24	0.9656013	0.1838670	0.1838670	0.3219034

Table 1: Directions (M) et poids des quadratures S4 et S6 (premier octant).

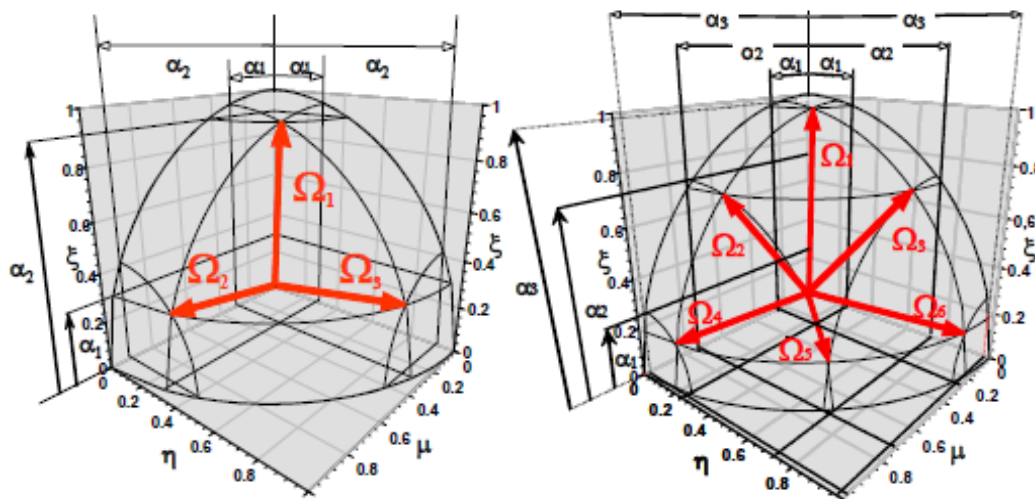


Figure 1: Directions des quadratures S4 et S6 (premier octant).

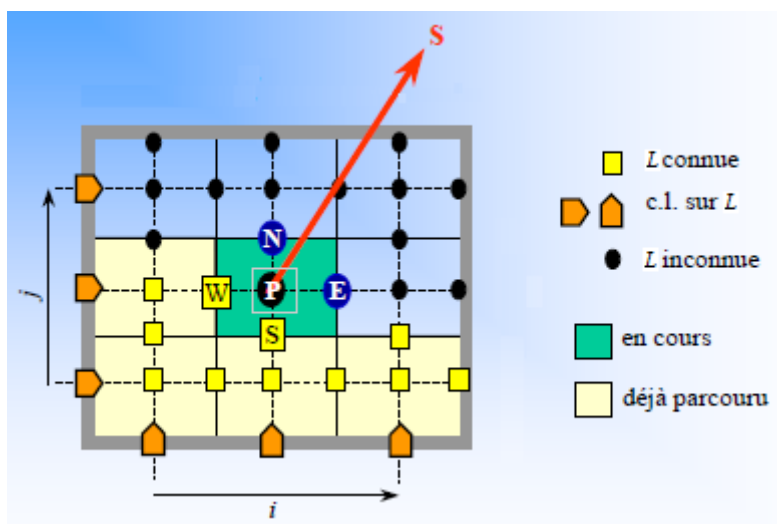


Figure 2: Volume de contrôle pour l'intégration de l'ETR en coordonnées cartésiennes.

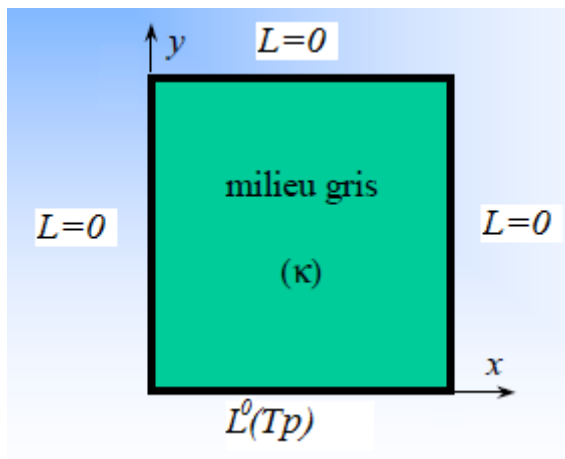


Figure 4: Cavité    l'équilibre radiatif.

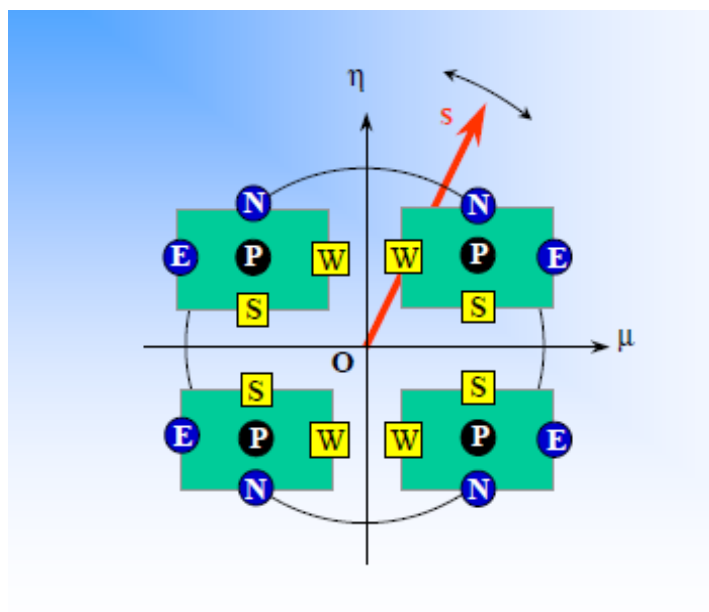


Figure 3: Orientation des volumes de contrôle suivant la direction optique.



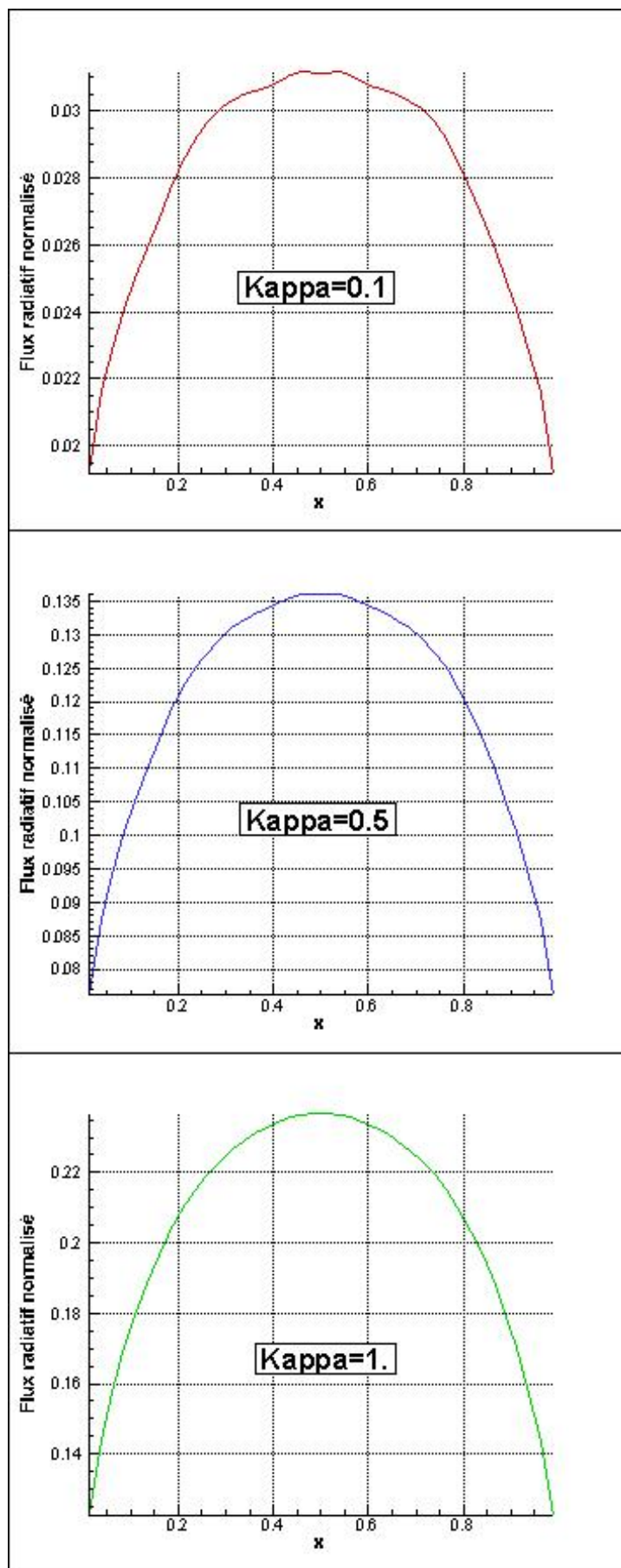


Figure 5: Flux radiatif normalisé reçu par la paroi chaude. Influence du coefficient d'absorption (Cavité de 1m×1m. Maillage 40×40. Quadrature S6. Schéma DIAMANT).

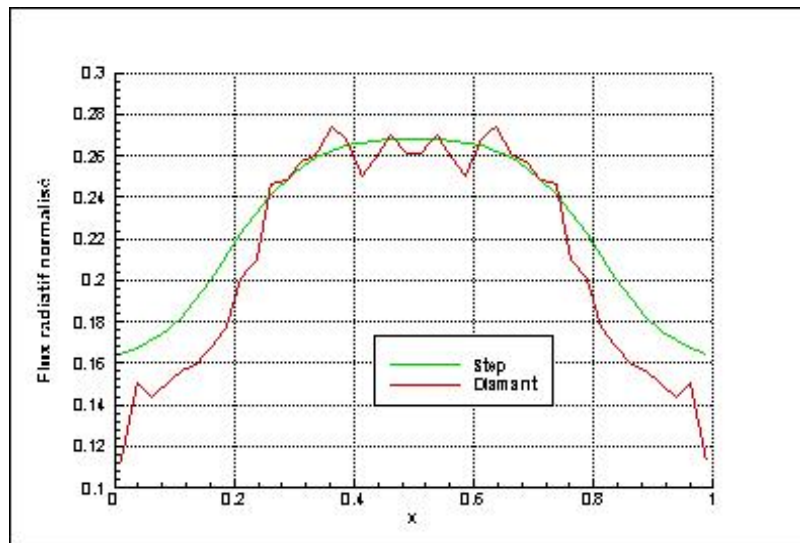


Figure 6: Flux radiatif normalisé reçu par la paroi haute. Influence du schéma d'interpolation (Cavité de  $1\text{m}\times 1\text{m}$ . Maillage  $40\times 40$ .  $\kappa = 1\text{m}^{-1}$ . Quadrature S6).