Calcul du rayonnement par la méthode de Monte Carlo

par Matthieu DE GENNARO, Maxime MENSE et Bernard PORTERIE

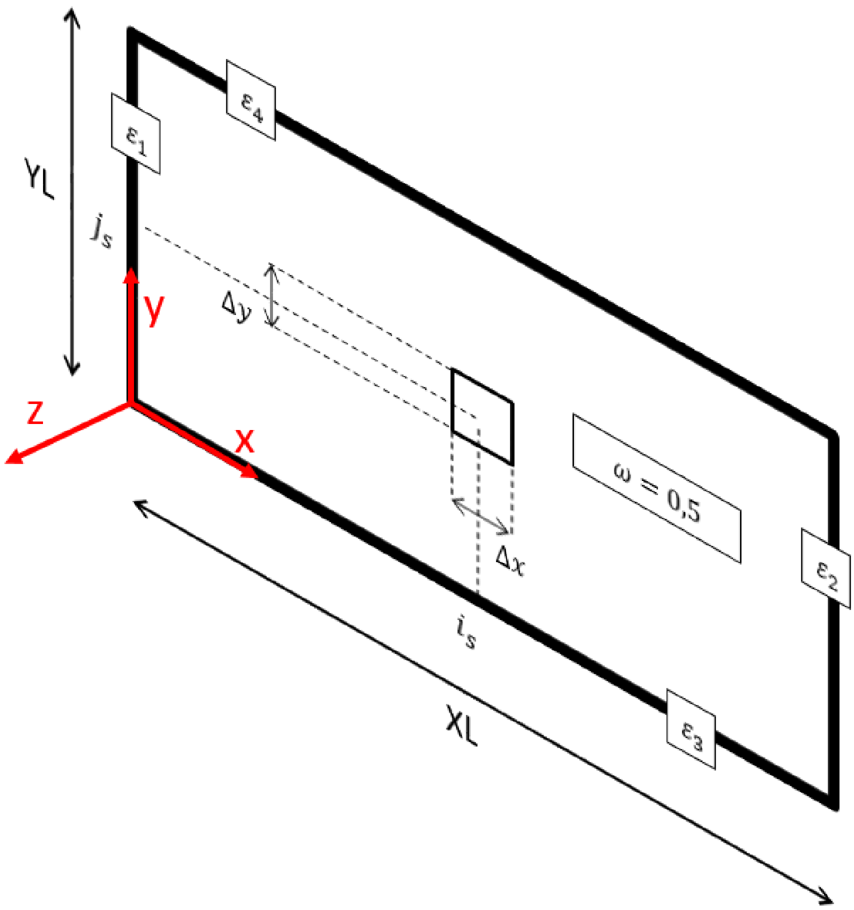
Aix-Marseille Université, CNRS, IUSTI UMR 7343, 13453 Marseille, France

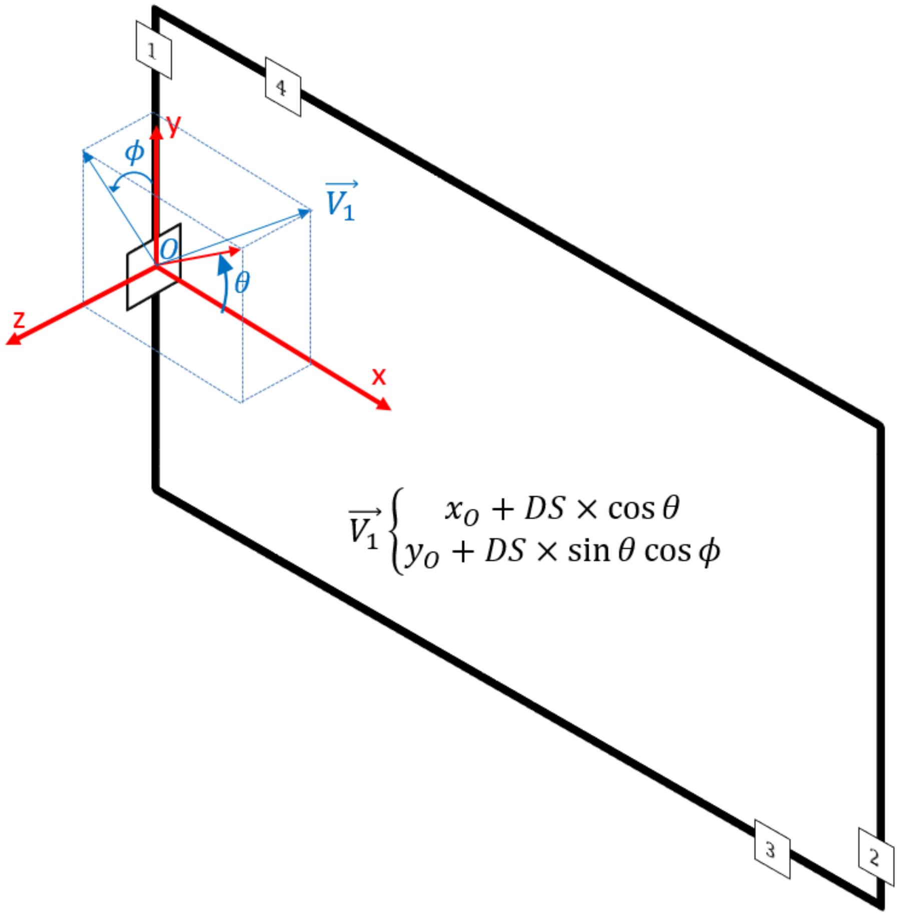
I. Rayonnement dans une cavité 2D

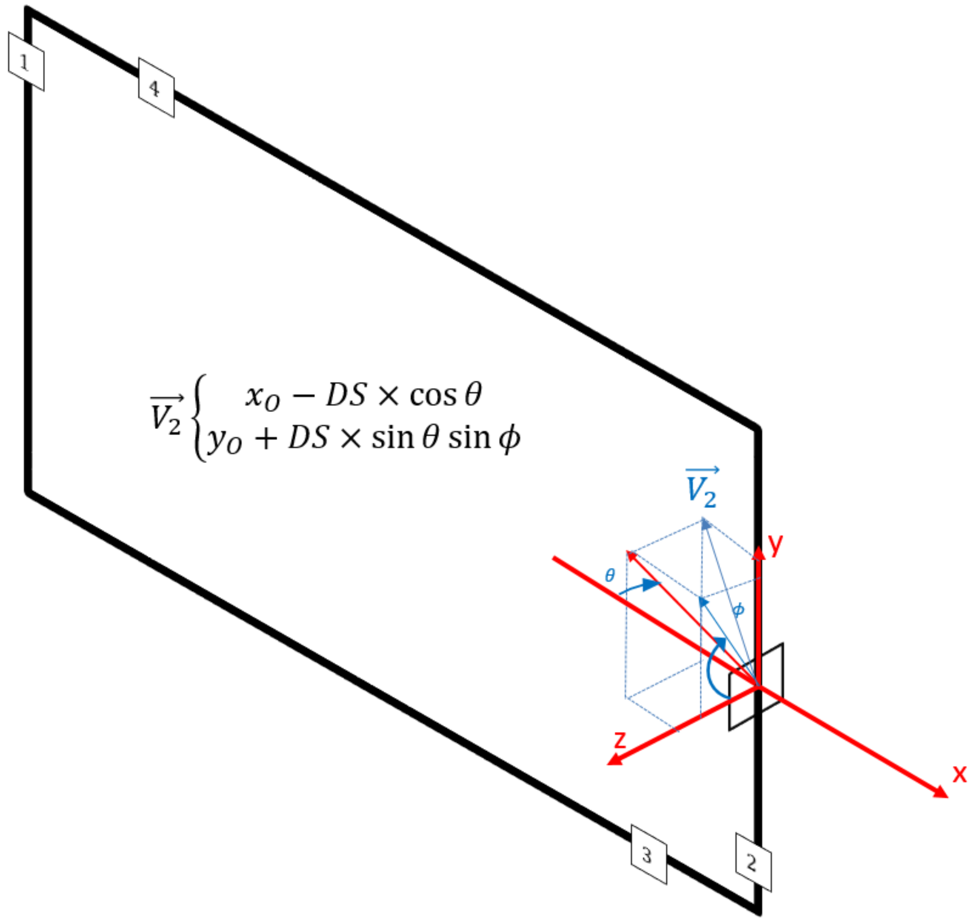
On place une source radiative à l'intérieur d'une cavité 2D contenant un milieu semi-transparent (MST) absorbant-diffusant, d'albédo ω et de coefficient d'extinction β.

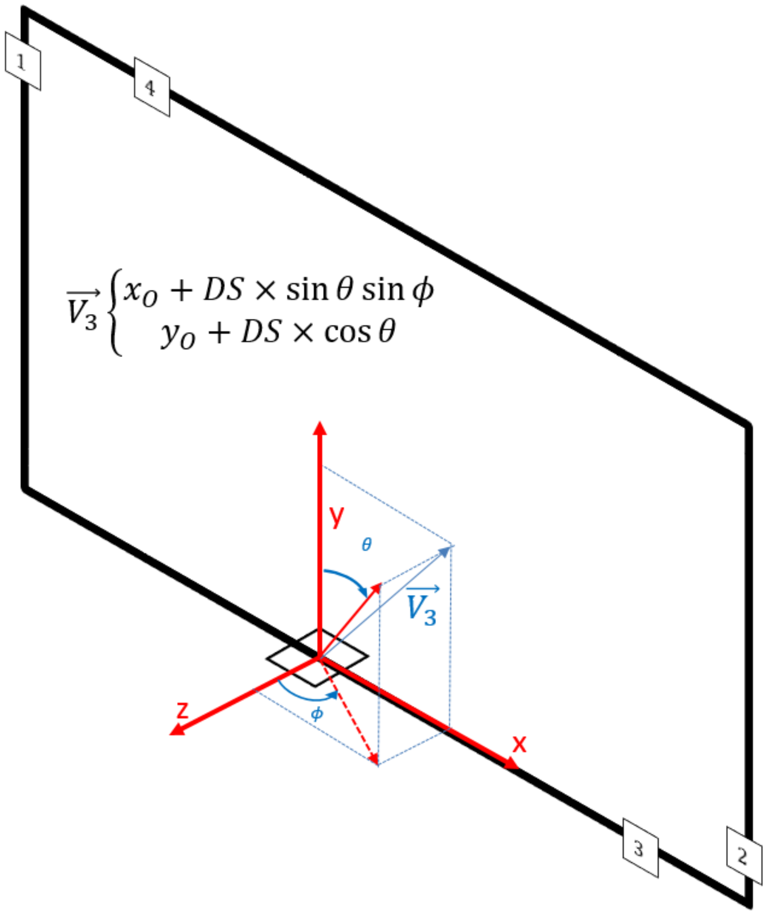
L'objectif est de calculer le champ de sources radiatives dans le MST (W/m^3), terme source de l'équation de bilan d'énergie, et les flux radiatifs (W/m²) aux parois. Les parois sont grises. On notera $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ les émissivités des parois ouest (n_{paroi}=1), est (n_{paroi}=2), sud (n_{paroi}=3) et nord (n_{paroi}=4). On découpe le domaine de calcul bidimensionnel en $IMAX \times JMAX$ cellules élémentaires de dimensions $\Delta x \times \Delta y$.

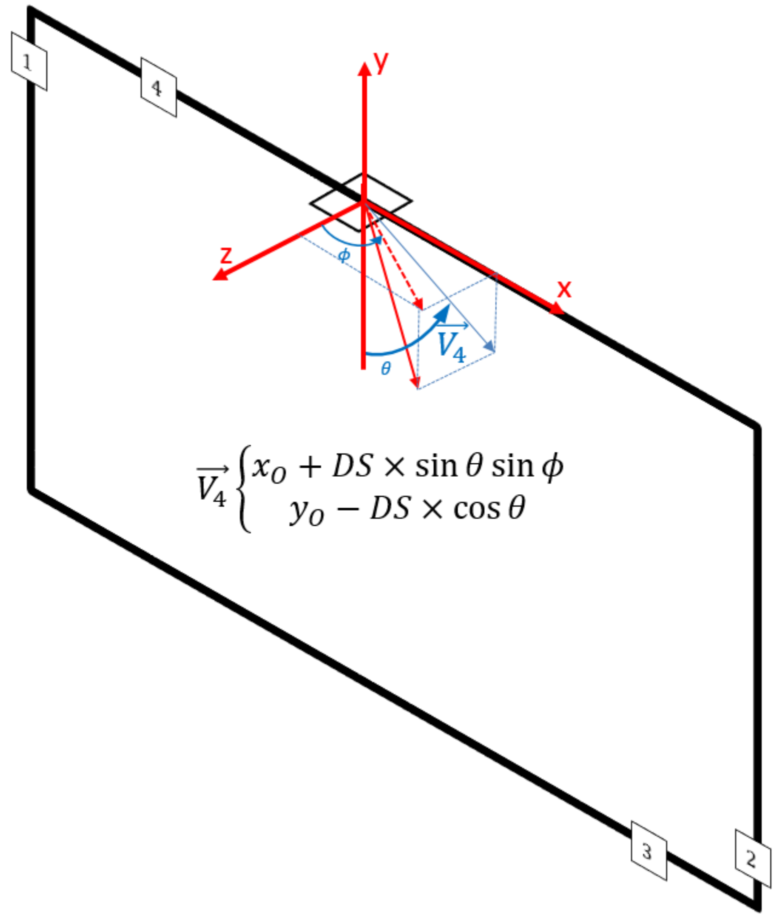
A l'aide de repères locaux, les directions optiques sont projetées dans le plan xy, donnant les vecteurs $\vec{V_i}$ (voir figures ci-dessous).




1
4
3
2
y
x
z
O
ϕ
θ
$\overrightarrow{V_1}$
$\overrightarrow{V_1}\begin{cases} x_O + DS \times \cos\theta \\ y_O + DS \times \sin\theta\cos\phi \end{cases}$


1
4
$\overrightarrow{V_2}\begin{cases} x_O - DS \times \cos\theta \\ y_O + DS \times \sin\theta \sin\phi \end{cases}$
$\overrightarrow{V_2}$
y
θ
ϕ
z
x
3
2


1
4
3
2
$\overrightarrow{V_3}\begin{cases} x_O + DS \times \sin\theta \sin\phi \\ y_O + DS \times \cos\theta \end{cases}$
y
θ
$\overrightarrow{V_3}$
z
ϕ
x



Données d'entrée :

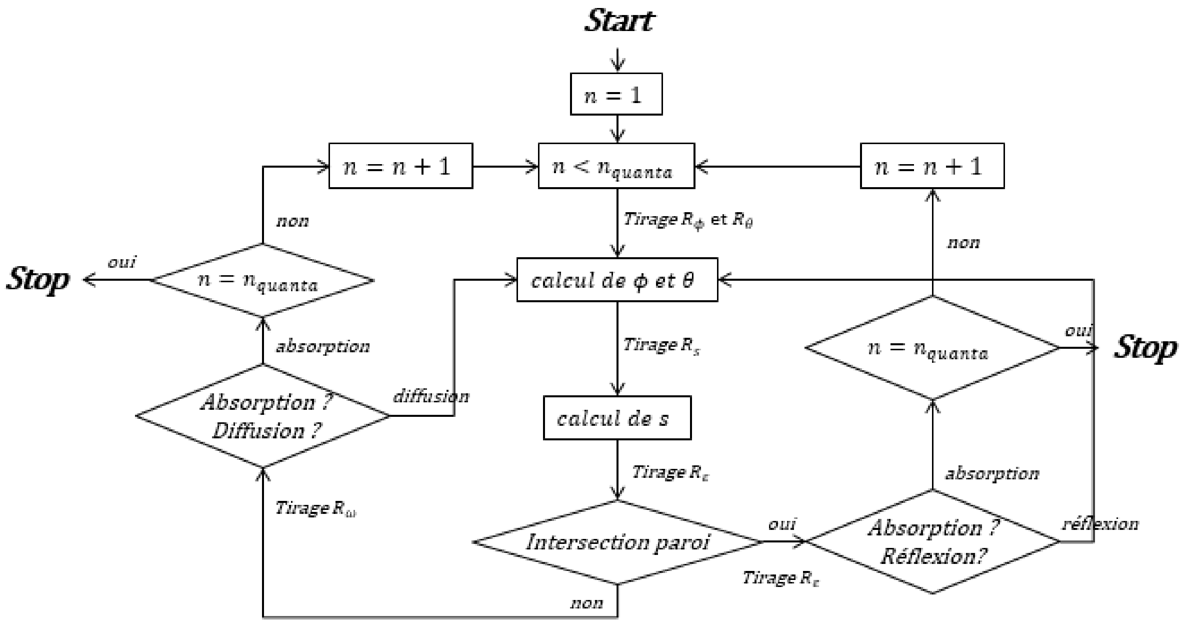
- Longueur de la cavité : XL=3 m
- Largeur de la cavité : YL = 3 m
- Emissivité des parois : EPS1=0.6, EPS2=0.6, EPS3=0.6, EPS4=0.6
- Albédo : OMEGA=0.5
- Coefficient d'extinction : BETA=0.5
- Maillage de la cavité : IMAX=41, JMAX=41
- Pouvoir émissif de la source : PE=1.
- Indices de position de la source : IS=21, JS=21
- Nombre de quanta : Nquanta = 10^7

Séquence d'opérations :

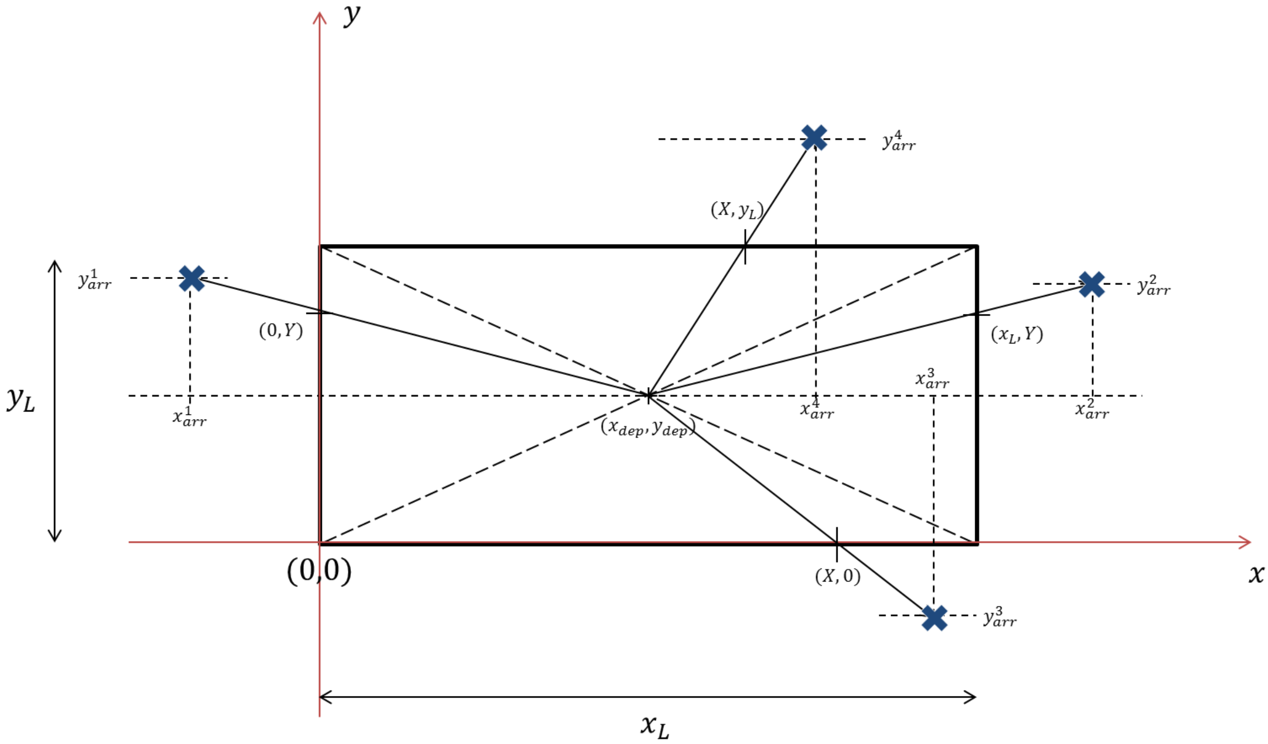
- Maillage de la cavité.
  On notera X(I) et Y(J) les coordonnées des centres des mailles.
- Initialisation du générateur de nombres aléatoires
- Mise à zéro des nombres de quanta dans le milieu et aux parois
- Boucle sur les quanta (voir l'organigramme ci-dessous)

Sorties :

- Champ de sources radiatives au sein de la cavité
- Flux radiatifs aux parois de la cavité



Calcul des coordonnées du point d'intersection des quanta avec les parois de la cavité



- Paroi ouest:

$$\frac{Y - y_{dep}}{y_{arr}^1 - y_{dep}} = \frac{0 - x_{dep}}{x_{arr}^1 - x_{dep}} \rightarrow Y = y_{dep} - \frac{x_{dep} - 0}{x_{dep} - x_{arr}^1}(y_{dep} - y_{arr}^1)$$

- Paroi est :

$$\frac{Y - y_{dep}}{y_{arr}^2 - y_{dep}} = \frac{x_L - x_{dep}}{x_{arr}^2 - x_{dep}} \rightarrow Y = y_{dep} - \frac{x_{dep} - x_L}{x_{dep} - x_{arr}^2}(y_{dep} - y_{arr}^2)$$

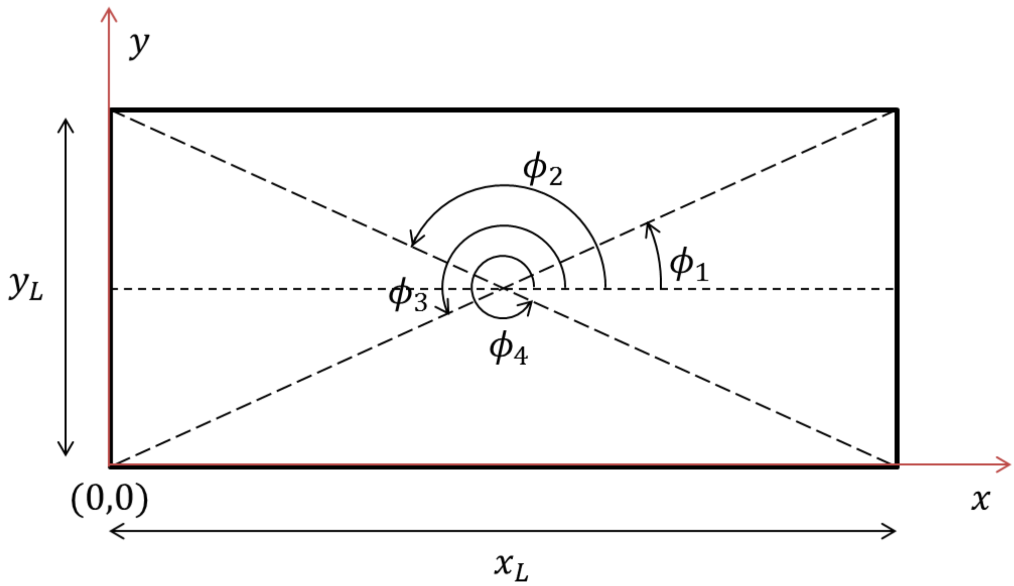
- Paroi sud :

$$\frac{0 - y_{dep}}{y_{arr}^3 - y_{dep}} = \frac{X - x_{dep}}{x_{arr}^3 - x_{dep}} \rightarrow X = x_{dep} - \frac{y_{dep} - 0}{y_{dep} - y_{arr}^3}(x_{dep} - x_{arr}^3)$$

- Paroi nord :

$$\frac{y_L - y_{dep}}{y_{arr}^4 - y_{dep}} = \frac{X - x_{dep}}{x_{arr}^4 - x_{dep}} \rightarrow X = x_{dep} - \frac{y_{dep} - y_L}{y_{dep} - y_{arr}^4}(x_{dep} - x_{arr}^4)$$

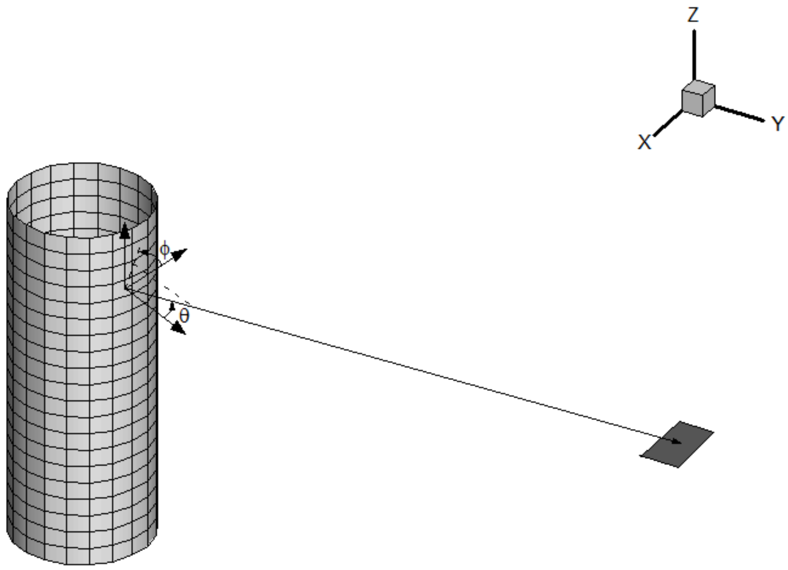
Définition des secteurs angulaires



- Paroi ouest : $\phi_2 \leq \phi \leq \phi_3$
- Paroi est : $0 \leq \phi \leq \phi_1 \; et \; \phi \geq 2\pi - \phi_4$
- Paroi sud : $\phi_3 \leq \phi \leq \phi_4$
- Paroi nord : $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$

II. Rayonnement d'une flamme cylindrique

L'objectif est ici de calculer le rayonnement émis par une flamme verticale cylindrique et reçu au sol. Pour ce faire, on utilise le modèle de flamme solide, qui consiste à représenter la flamme comme un corps de géométrie simple (cylindre, panneau,…) dont seule la surface rayonne. On modélise ensuite le rayonnement par une méthode de Monte Carlo. La surface de la flamme est maillée de façon uniforme. Chaque mètre carré de surface émet un nombre de quanta N_{quanta} .



Données d'entrée :

- Hauteur de flamme : HF=1 m
- Rayon de flamme : RF = 20 cm
- Longueur du domaine au sol : LX = 5 m
- Largeur du domaine au sol : LY = 5 m
- Pouvoir émissif : PE=100 kW/m²
- Nombre de quanta par mètre carré de flamme : Nquanta = 10^8 m^{-2}
- Rayon de la sphère enveloppe (arbitraire, R>>LX) : R=100 m

Séquence d'opérations :

- Maillage du domaine au sol
- Maillage de la flamme et création du repère local attaché à chaque élément de surface de flamme (XF,YF, ZF)
- Calcul de la surface élémentaire et du nombre de quanta émis par cette surface
- Boucle sur les éléments d'émission
  - Calcul des coordonnées de la normale (NORMX, NORMY, NORMZ) et du barycentre (XC, YC, ZC) de chaque élément de surface de flamme
  - Boucle sur les quanta
    - Calcul des angles d'émission : θ et ϕ
    - Calcul des coordonnées du point d'intersection de la direction d'émission avec une sphère de rayon R (arbitraire, ici R=100m)
    - Changement de repère

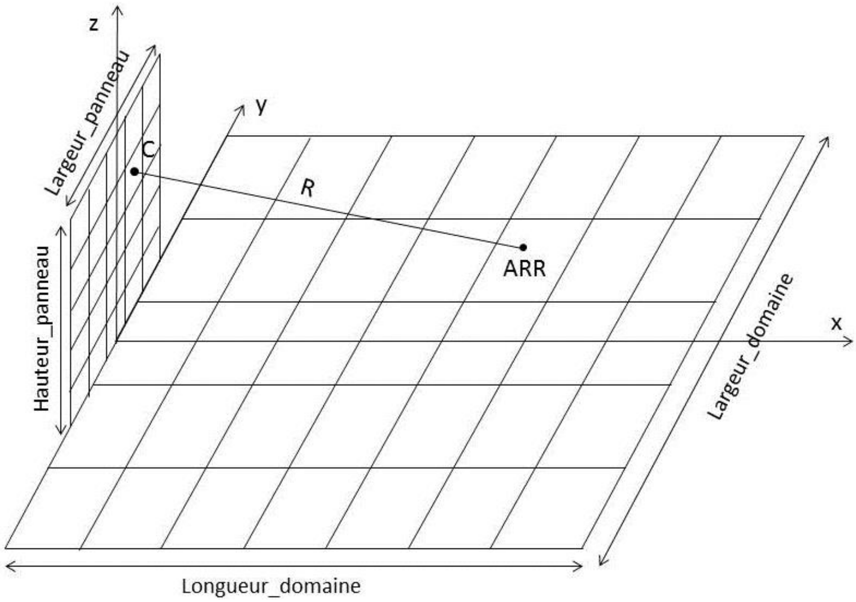
- Calcul des coordonnées du point d'arrivée (XARR, YARR, ZARR)
- Si le quantum touche le sol (ZARR ≤ 0), on calcule les coordonnées (XP, YP) du point d’impact, et on rajoute Q0 au pavé du sol touché par le quantum

Sortie :

- Champ de flux radiatif reçu par le sol

III. Rayonnement d'un panneau radiant vertical sur le sol

L'objectif est ici de calculer le rayonnement émis par un panneau radiant vertical et reçu au sol. On modélise le rayonnement par une méthode de Monte Carlo. On considère un panneau vertical rayonnant sur un domaine d'étude placé devant lui. La surface du panneau et celle du domaine sont maillées de façon uniforme. Chaque mètre carré de surface du panneau émet un nombre de quanta N_{quanta} .



Données d'entrée :

- Longueur du domaine au sol : LONGUEUR_DOMAINE = 20 m
- Largeur du domaine au sol : LARGEUR_DOMAINE = 20 m
- Hauteur du panneau : HAUTEUR_PANNEAU = 10 m
- Largeur du panneau : LARGEUR_PANNEAU = 10 m
- Emissivité du sol : EW_SOL = 1 (surface noire)
- Pouvoir émissif : PE=100 kW/m²
- Nombre de quanta par mètre carré de flamme : Nquanta = 10^6 m^{-2}
- Maillage panneau : IMAXP=40, KMAXP=40
- Maillage domaine au sol : IMAX=100, JMAX=100

Séquence d'opérations :

- Maillage du domaine au sol
  X et Y sont les coordonnées du centre de chaque maille.
- Maillage du panneau
  YP et ZP sont les coordonnées du centre de chaque maille.
- Calcul des surfaces élémentaires DS et DSP du domaine au sol et du panneau
- Calcul du nombre de quanta émis par chaque élément de surface du panneau
- Boucle sur les éléments de surface d'émission du panneau
  - Boucle sur les quanta

- Calcul des angles d'émission : θ et ϕ
- Calcul de la distance R parcourue par le quantum depuis le point d'émission (XC, YC, ZC) dans la direction (θ, ϕ) jusqu'au sol

$$x_{ARR} - x_c = R cos\theta$$
$$y_{ARR} - y_c = R sin\theta cos\phi$$
$$z_{ARR} - z_c = R sin\theta sin\phi$$

Pour $Z_{ARR} = 0$, la distance parcourue est donc $R = -\frac{z_c}{sin\theta sin\phi}$
Attention à éliminer la solution R<0 (le quantum part en arrière).

- Calcul des coordonnées (XARR, YARR) du point d'impact
- On teste si le point d'impact touche le domaine au sol
- On rajoute Q0 au pavé du sol touché par le quantum en cas d'absorption
  Dans le cas contraire, le quantum est perdu.

Sorties :

- Champ de flux radiatif reçu par le sol
- Flux radiatif selon X dans le plan (X, Z)

Annexe

Appliquée aux transferts radiatifs, la MMC consiste à suivre l'histoire d'un quantum (supposé indivisible) de sa naissance à sa mort, c'est-à-dire depuis son émission jusqu'à son absorption. Les événements subis par un quantum sont les suivants :

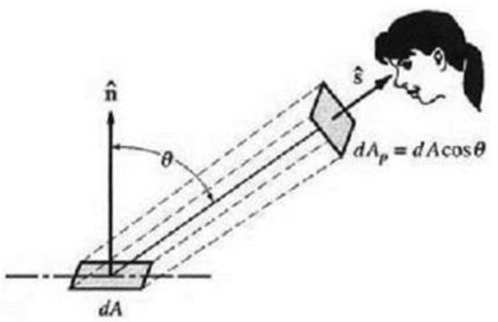
- Emission à partir d'une paroi
- Emission à partir d'un élément de volume du milieu
- Distance parcourue avant absorption ou diffusion
- Absorption ou diffusion par un élément de volume du milieu
- Absorption ou réflexion par une paroi

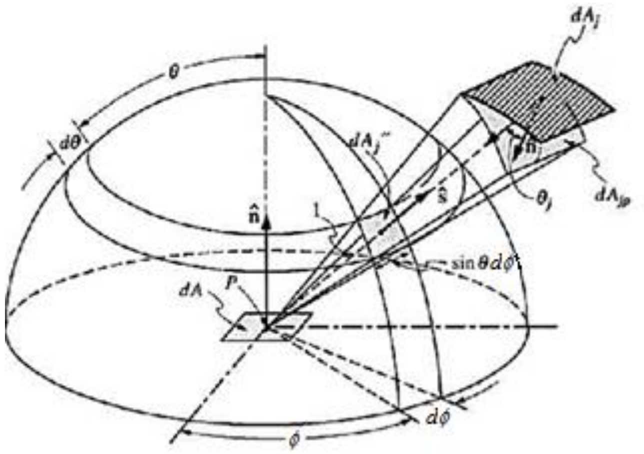
On répète cette histoire de façon aléatoire un grand nombre de fois et l'on moyenne les résultats obtenus pour calculer les grandeurs macroscopiques recherchées : flux aux parois, sources volumiques,...

Dans ce qui suit, on fait l'hypothèse d'un **milieu gris**.

Emission à partir d'une paroi

On considère une paroi grise d'émissivité ε sur laquelle on isole un élément de surface dA (m^{-2}) isotherme à la température T (K) (voir figure ci-dessous)





Le flux émis par dA dans un angle solide $d\Omega$ autour de Ω est :

$$dQ_{dA}\,(W) = \varepsilon\frac{\sigma T^4}{\pi}dA_p d\Omega \;=\; \varepsilon\frac{\sigma T^4}{\pi}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}dAd\Omega \qquad (1)$$

Puisque $\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n} = \cos\theta$ et $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, on obtient la loi macroscopique:

$$dQ_{dA} \;=\; \varepsilon\frac{\sigma T^4}{\pi}dA\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi \qquad (2)$$

Par intégration, le flux total émis dans le demi-espace est alors :

$$Q_{dA}\,(W) \;=\; dA\frac{\sigma T^4}{\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\phi=0}^{2\pi}\varepsilon\, cos\,\theta\, sin\,\theta d\theta d\phi \tag{3}$$

Dans le cadre de ce cours, nous n'envisagerons que le cas de parois à émission isotrope pour lesquelles l'émissivité n'est pas directionnelle : $\varepsilon(\theta,\phi) \;=\varepsilon$.

La relation (3) se réduit à : $Q_{dA} \;=\; dA\varepsilon\sigma T^4$.

Si l'on veut simuler ce flux par l'émission de N quanta, l'énergie véhiculée par chaque quantum doit donc être :

$$q\,(W) \;=\frac{Q_{dA}}{N}=\frac{dA\varepsilon\sigma T^4}{N} \tag{4}$$

et la loi macroscopique (2) s'écrit :

$$dQ_{dA} \;= q\,\frac{(N\, cos\,\theta\, sin\,\theta d\theta d\phi)}{\pi} \tag{5}$$

En pratique, l'émission d'un quantum correspond à la génération aléatoire des angles θ et ϕ suivant des lois de probabilité respectant la loi macroscopique (5).

Calculons les densités de probabilité et les fonctions de répartition des variables aléatoires indépendantes θ et ϕ. Pour respecter la loi (5), le nombre de quanta émis entre $\theta \;=\; x$ et $\theta \;=\; x + \Delta x$, ϕ restant dans un intervalle donné $\Delta\phi$, doit donc être :

$$N_{quanta} = \frac{N\Delta\phi}{\pi} cos\,x\; sin\,x\Delta x$$

Pour cela, il faut que :

$$P\,(x \;\le\; \theta \;\le\; x+\Delta x) \;= \frac{\frac{N\Delta\phi}{\pi}\; cos\,x\; sin\,x\Delta x}{\frac{N\Delta\phi}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\,x\; sin\,x dx} = \;2cosx\; sin\,x\Delta x$$

ce qui impose pour $\theta \in [0,\pi/2]$:

$$f_\theta(x) = \;\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\,(x\le\theta\le x+\Delta x)}{\Delta x} \;=\; 2cos\,x\; sin\,x \tag{6}$$

et

$$F_\theta(x) = \int_0^x 2\; cos\,x\; sin\,x dx \;\; = \sin^2(x) \tag{7}$$

En faisant de même pour $\phi \in [0, 2\pi]$, il vient :

$$f_\phi\,(x) \;=\frac{1}{2\pi} \tag{8}$$

et

$$F_\phi\,(x) \;=\frac{1}{2\pi}\int_0^x dx \;\;=\frac{x}{2\pi} \tag{9}$$

Déroulement du calcul

- On génère 2 nombres aléatoires R_θ et R_ϕ suivant une distribution uniforme sur $[0,1]$
- On calcule θ en inversant la relation (7) : $\theta = arcsin\sqrt{R_\theta}$
- On calcule ϕ en inversant la relation (9) : $\phi = 2\pi R_\phi$

En conclusion, pour simuler le flux radiatif $Q_{dA}(W) = dA\varepsilon\sigma T^4$ émis par un élément de paroi $dA\ (m^2)$, on envoie N quanta d'énergie $q\ (W) = Q_{dA}/N$ dans la direction $\theta = arcsin\sqrt{R_\theta}$ et $\phi = 2\pi R_\phi$.

Emission à partir d'un élément de volume du milieu

Le flux émis par un petit élément de volume $dV\ (m^3)$ du milieu de coefficient d'absorption $\kappa\ (m^{-1})$, supposé isotherme, autour d'un point P est isotrope.

Il s'écrit :

$$dQ_{dV}\ (W) = \kappa \frac{\sigma T^4}{\pi} dV d\Omega = \kappa \frac{\sigma T^4}{\pi} dV \sin\theta d\theta d\phi \qquad (10)$$

et par intégration: $Q_{dV}\ (W) = 4\kappa\sigma T^4 dV$.

Si l'on veut simuler ce flux par l'émission de N quanta, l'énergie véhiculée par chaque quantum doit donc être :

$$q\ (W) = \frac{Q_{dV}}{N} = \frac{4\kappa\sigma T^4 dV}{N} \qquad (11)$$

et la loi macroscopique s'écrit :

$$dQ_{dV} = \frac{qN}{4\pi} \sin\theta d\theta d\phi \qquad (12)$$

Cela correspond aux lois de probabilité suivantes, pour $\theta \in [0,\pi]$ et $\phi \in [0,2\pi]$:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2}\sin x \qquad (13)$$

$$f_\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \qquad (14)$$

Les fonctions de répartition sont alors par intégration :

$$F_\theta\ (x) = \frac{1-\cos(x)}{2} \qquad (15)$$

$$F_\phi\ (x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x dx = \frac{x}{2\pi} \qquad (16)$$

Déroulement du calcul

• On génère 2 nombres aléatoires R_θ et R_ϕ suivant une distribution uniforme sur $[0, 1]$

• On calcule θ en inversant la relation (15) : $\theta = arccos\,(1 - 2R_\theta)$

• On calcule ϕ en inversant la relation (16) : $\phi = 2\pi R_\phi$

En conclusion, pour simuler le flux radiatif $Q_{dV}\ (W) = 4\kappa\sigma T^4 dV$ émis par un élément de volume $dV\ (m^3)$, on envoie N quanta d'énergie $q\ (W) = Q_{dV}/N$ dans la direction $\theta = arccos\,(1 - 2R_\theta)$ et $\phi = 2\pi R_\phi$.

Distance parcourue avant absorption ou diffusion

Nous avons vu que la fonction de répartition de s était de la forme: $F_s(x) = 1 - \exp(-\kappa x)$. Lorsque le milieu est à la fois absorbant et diffusant, la fonction de répartition de s est donnée par :

$$F_s(x) = 1 - \exp(-\beta x) \qquad \text{avec } 0 \leq F_s(x) \leq 1$$

$\beta = \kappa + \sigma_s$ est le coefficient d'extinction, σ_s le coefficient de diffusion.

Ainsi, après avoir déterminé la direction du quantum, sa longueur de parcours, avant absorption ou diffusion, est fixée aléatoirement par :

$$R_s = 1 - \exp(-\beta s) \tag{17}$$

Cela revient à trouver s tel que : $s = -\frac{\ln(1-R_s)}{\beta}$ ou mieux, puisque R_s est arbitraire :

$$s = -\frac{\ln(R_s)}{\beta} \tag{18}$$

Le quantum meurt par absorption ou diffusion. Dans ce dernier cas, le quantum meurt car il change de direction optique. Connaissant le point P d'émission, la direction d'émission et la distance parcourue par le quantum, on peut déterminer alors le point d'extinction P'.

Deux cas se présentent :

• P' est à l'intérieur du milieu. Le quantum peut être alors absorbé ou diffusé.

• P' est situé au-delà de la paroi. On calcule alors P", intersection du segment PP' avec la paroi. Le quantum peut être alors absorbé ou réfléchi en P".

Absorption ou diffusion par un élément de volume du milieu

Pour un milieu absorbant-diffusant, on définit l'albédo ω par : $\omega = \sigma_s/\beta$. L'albédo est un nombre sans dimension compris entre 0 et 1: $\omega = 0$ pour un milieu purement absorbant ($\sigma_s = 0$) et $\omega = 1$ pour un milieu purement diffusant ($\kappa = 0$).

Puisque $0 \leq \omega \leq 1$, on peut directement relier la valeur locale de l'albédo à la probabilité qu'un quantum soit diffusé ou absorbé par un élément de volume centré en P' :

$$P\ (q\ diffusé) = \omega$$

$$P\ (q\ absorbé) = 1 - \omega$$

Si R_ω est un nombre aléatoire sur $[0, 1]$, on aura :
$R_\omega \geq \omega$ ➔ absorption
$R_\omega < \omega$ ➔ diffusion

• S'il y a ABSORPTION, l'élément de volume récupère l'énergie du quantum dont l'histoire se termine en P'.

• S'il y a DIFFUSION, l'élément de volume ne récupère aucune énergie. Si la diffusion est **isotrope**, la direction est générée comme s'il s'agissait d'une émission à partir de P'. Si la diffusion est **anisotrope**, la direction est générée en respectant la fonction de phase.

Absorption ou réflexion par une paroi

La probabilité qu'un quantum soit réfléchi ou absorbé par un élément de paroi centré en P" est directement reliée à la valeur locale du coefficient de réflexion $\rho = 1 - \varepsilon$:

$$P\ (q_{réfléchi}) = \rho = 1 - \varepsilon$$

$$P\ (q_{absorbé}) = 1 - \rho = \varepsilon$$

Si R_ε est un nombre aléatoire sur $[0, 1]$, on aura :
$R_\varepsilon \leq \varepsilon$ ➔ absorption
$R_\varepsilon > \varepsilon$ ➔ réflexion

• S'il y a ABSORPTION, l'élément de surface récupère l'énergie du quantum dont l'histoire se termine en P".

• S'il y a REFLEXION, l'élément de surface ne récupère aucune énergie.

Si la paroi est à **réflexion diffuse**, la direction est générée comme s'il s'agissait d'une émission à partir de P".