

## Utilisation de l'analyse de sensibilité pour mieux connaître son modèle

par Floriane ANSTETT-COLLIN<sup>(1)</sup> et Anthony COLLIN<sup>(2)</sup>

(1) : CRAN, Université de Lorraine, floriane.collin@univ-lorraine.fr

(2) : LEMTA, Université de Lorraine, anthony.collin@univ-lorraine.fr

"Sans l'incertitude, l'aventure n'existerait pas", Alain Séjourné

Objectifs du TP

- Comprendre l'intérêt de l'analyse de sensibilité pour un modèle physique donné,
- Savoir appliquer une analyse de sensibilité locale et globale.

### 1 Introduction

De manière générale, tout problème de physique (thermique, mécanique des fluides ou autres) est traité par le biais d'une équation ou d'un système d'équations différentielles, qui traduisent un lien entre la grandeur d'intérêt  $y$  (ici un scalaire) et la variable de travail  $\mathbf{x}$  (le temps ou les variables d'espace), les paramètres  $\mathbf{p}$  du modèle (de dimension  $N_p$ ) et les entrées  $\mathbf{X}$  du modèle (de dimension  $N_e$ ).

$$F(y, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{X}) = 0 \quad (1)$$

Les paramètres  $\mathbf{p}$  sont des grandeurs parfaitement connues pour le modèle étudié : les constantes de physique telles que celles de Stefan Boltzmann, de Planck, ... Par contre, les entrées  $\mathbf{X}$  du modèle sont a priori "connues" mais leurs valeurs nominales sont liées à une certaine incertitude (c'est pour cette raison qu'on les dissocie des paramètres du modèle) : par exemple pour l'étude de la propagation des feux de végétation, la charge au sol de la végétation, l'humidité de la végétation, ... sont des grandeurs qui peuvent être connues en moyenne, mais elles peuvent varier dans l'espace ou dans le temps.

Ces incertitudes liées aux entrées  $\mathbf{X}$  du modèle peuvent avoir des conséquences sur la grandeur recherchée  $y$  en introduisant une incertitude sur la valeur obtenue. Par exemple, sur les feux de végétation, les incertitudes liées à la charge au sol et à l'humidité des végétaux peuvent modifier grandement des valeurs des vitesses de propagation du front de flammes obtenues par le modèle physique.

Par définition, l'analyse de sensibilité étudie comment des perturbations sur les entrées du modèle engendrent des perturbations sur la sortie d'un modèle [1]. Il existe trois grandes classes de méthodes d'analyse de sensibilité :

- les méthodes de screening,
- l'analyse de sensibilité locale,
- l'analyse de sensibilité globale.

Les méthodes de screening ont pour objectif de hiérarchiser qualitativement l'importance de chaque variable d'entrée par rapport à leur influence sur la sortie du modèle étudié. L'analyse de sensibilité locale ou globale offre la possibilité de quantifier cette hiérarchie au sein des paramètres d'entrée et de donner un ordre de grandeur des écarts au sein de cette même hiérarchie. La différence entre les analyses de sensibilité locale et globale réside uniquement sur le fait que l'analyse de sensibilité locale étudie comment de petites perturbations prises autour d'une valeur nominale pour les entrées du modèle alors que l'analyse de sensibilité globale analyse l'influence de chaque entrée sur son domaine entier de variabilité.

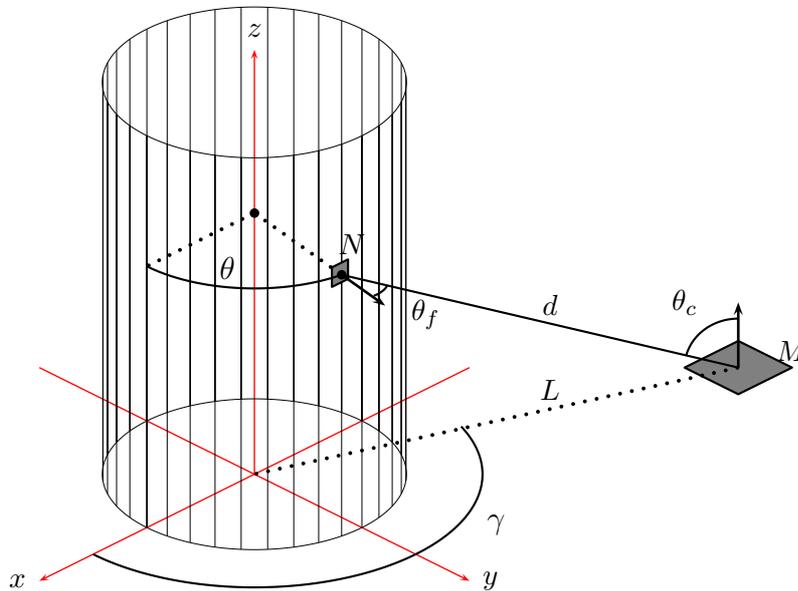


FIGURE 1 – Modèle radiatif de flamme solide

Au travers de ce TP, nous présenterons une approche pour chaque classe de méthode d'analyse de sensibilité :

- Analyse de sensibilité locale : approche OAT (One factor At Time),
- Méthodes de screening : approche de Morris,
- Analyse de sensibilité globale : indice de sensibilité de Sobol par Monte Carlo.

Décrivons à présent, le modèle que nous allons utiliser durant ce TP.

## 2 Modèle étudié dans le cadre de ce TP

Pour donner un cadre d'application à ce TP, nous allons étudier la densité de flux radiatif émise par une flamme dans son proche voisinage. Nous supposons que cette flamme peut être représentée par un cylindre de diamètre  $D$  et de hauteur  $H$  (Cf. Figure 1). Nous émettrons également l'hypothèse que la flamme est à une température uniforme,  $T$  constante.

D'un point de vue radiatif, nous admettrons que la flamme rayonne comme une surface solide (d'où le nom du modèle de flamme solide) où les surfaces supérieure et inférieure du cylindre ne seront pas prises en compte pour calculer les densités de flux rayonnées.

La densité de flux radiatif reçue en un capteur situé au point  $M$  à une distance  $L$  du centre de la flamme est donnée par l'expression :

$$\varphi_{\text{rad}} = \epsilon \sigma T^4 S_{\text{flamme}} F_{\text{f-c}} \quad (2)$$

où  $\epsilon$  est l'émissivité équivalente de la flamme,  $S_{\text{flamme}}$  la surface totale de la flamme émettant du rayonnement et  $F_{\text{flamme-capteur}}$  est un terme équivalent à un facteur de forme entre la flamme solide et

le capteur dont les unités sont donnés en  $m^{-2}$ .  $F_{\text{flamme-capteur}}$  est obtenu en calculant :

$$F_{f-c} = \frac{1}{S_{\text{flamme}}} \int_{S_{\text{flamme}}} \frac{\cos \Theta_f \cos \Theta_c}{\pi d^2} dS_{\text{flamme}} \quad (3)$$

$F_{f-c}$  se développe sous forme d'une relation analytique simple comme elle a été démontrée par Beyler [2] :

$$S_{\text{flamme}} F_{f-c} = \frac{B - 1/S}{\pi \sqrt{B^2 - 1}} \arctan \left( \sqrt{\frac{(B+1)(S-1)}{(B-1)(S+1)}} \right) - \frac{A - 1/S}{\pi \sqrt{A^2 - 1}} \arctan \left( \sqrt{\frac{(A+1)(S-1)}{(A-1)(S+1)}} \right) \quad (4)$$

avec,

$$h = \frac{2H}{D} \quad S = \frac{2L}{D} \quad A = \frac{h^2 + S^2 + 1}{2S} \quad B = \frac{1 + S^2}{2S} \quad (5)$$

Par conséquent, la densité de flux radiatif  $\varphi_{\text{rad}}$  est obtenue par un modèle direct (pas de résolution d'équations différentielles) et dépend de plusieurs données d'entrée. Ainsi,

$$\varphi_{\text{rad}} = f \left( \underbrace{L}_{\text{paramètre}}, \underbrace{\epsilon, T, D, H}_{\text{entrées}} \right) \quad (6)$$

Nous allons donc étudier les influences des incertitudes de  $\epsilon$ ,  $T$ ,  $D$  et  $H$  sur la valeur de  $\varphi_{\text{rad}}$  en imposant  $L$  à une valeur fixe.

### Travail 1 - Travail préparatoire

1.1 - Sous Matlab, préparez une fonction qui calcule la densité de flux rayonné en fonction des paramètres d'entrées. Votre fonction devra débuter par l'entête suivante :

```
function DFluxRad = FlammeSolide(Parametres,Entrees)
```

où le vecteur Parametres contiendra la valeur de L et Entrees les valeurs de E, T, D et H.

1.2 - Testez votre fonction pour des valeurs de paramètres fixées à  $\epsilon = 0.9$ ,  $T = 1300$  K,  $D = 0.5$  m et  $H = 1.5$  m, en faisant varier  $L$  de 0,5 m à 5 m. Vérifiez que vos résultats sont conformes à ceux de la Figure 2.

## 3 Analyse de sensibilité locale : approche One factor At Time

Une analyse de sensibilité locale mesure la sensibilité des variations de la sortie du modèle (ici  $y$ ) en ne faisant varier qu'une seule variable d'entrée alors que les autres sont fixées à leurs valeurs nominales. Il convient alors de considérer que de faibles variations pour chacune des composantes de  $\mathbf{X}$  (entrées du modèle).

L'analyse de sensibilité locale étudie comment de petites perturbations autour d'une valeur de référence des entrées influent la sortie du modèle. Cette analyse est donc liée à un "point de fonctionnement" particulier (pour des valeurs données de  $\mathbf{X}$ ).

L'approche "One factor At a Time" consiste à déterminer les indices de sensibilité définis par des dérivées partielles,

$$S_i = \frac{\partial y}{\partial X_i} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^0} \quad (7)$$

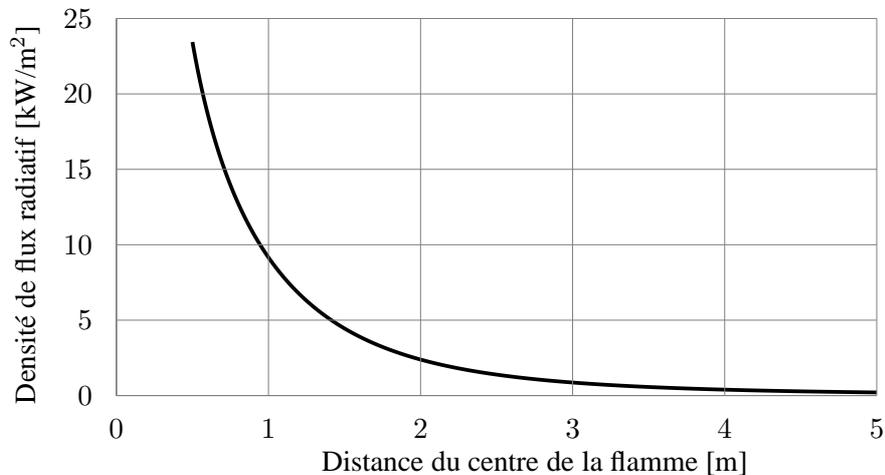


FIGURE 2 – Représentation de la densité de flux radiatif en fonction de la distance d'éloignement du centre de la flamme pour le jeu de paramètre cité au Travail 1.2

$S_i$  exprime alors l'effet sur  $y$  d'une perturbation de la variable d'entrée  $X_i$  autour d'un point de fonctionnement  $\mathbf{X}^0$ . L'indice de sensibilité  $S_i$ , défini par la relation (7), n'est pas une grandeur normée ce qui rend impossible la comparaison de plusieurs indices de sensibilité issus de grandeurs physiques qui ne sont pas exprimés par de mêmes unités. Il convient alors de privilégier un indice de sensibilité normé par,

$$S_i = \frac{X_i^0}{y^0} \frac{\partial y}{\partial X_i} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^0} \quad (8)$$

où  $y^0$  est la valeur de sortie du modèle obtenue pour le vecteur  $\mathbf{X}^0$  comme variables d'entrée. Plus la valeur de l'indice de sensibilité est importante, plus le paramètre d'entrée étudié a une influence sur la sortie du modèle.

Comme il a été évoqué précédemment, l'analyse de sensibilité locale donne une information valable uniquement autour du point nominal  $\mathbf{X}^0$  où cette analyse est appliquée. Elle ne renseigne en rien de l'influence des paramètres d'entrée sur l'ensemble de leurs domaines de variabilité : c'est le rôle de l'analyse de sensibilité globale.

### Travail 2 - Travail sur l'analyse de sensibilité locale

- 2.1 - Sous Matlab, préparez un nouveau script qui permettra d'appliquer une analyse de sensibilité locale sur le modèle de flamme solide,
- 2.2 - En considérant des variations de 1% pour estimer vos indices de sensibilité, quelle est, parmi vos paramètres d'entrée, la grandeur qui influe le plus la sortie du modèle ? Nous utiliserons comme valeurs nominales :  $L = 2$  m,  $\epsilon = 0,3$ ,  $T = 1300$  K,  $D = 0,5$  m et  $H = 1,5$  m,
- 2.3 - Est-ce que la hiérarchie de vos paramètres d'entrée change si vous considérez maintenant des variations de 0,5% et 0,1% pour estimer vos indices de sensibilité ? Et pour 10% ?

## 4 Méthodes de screening : approche de Morris

L'approche de Morris [3] est en quelque sorte une généralisation de la méthode OAT sur l'ensemble du domaine de variabilité de chaque variable d'entrée. Cette technique permet d'apporter plus d'informations sur le modèle étudié que l'approche OAT en permettant de classer (sans quantifier) les entrées selon trois classes [4] :

- entrées ayant des effets négligeables,
- entrées ayant des effets linéaires et sans interaction avec les autres variables d'entrée,
- entrées ayant des effets non linéaires et/ou avec interactions.

Cette approche consiste dans un premier temps à discrétiser chaque espace de phase des paramètres d'entrée en un nombre donné de niveaux (pour le paramètre d'entrée  $X_j$ , la largeur d'une discrétisation de son espace de phase est notée  $\Delta X_j$ ). Une expérience démarre avec un point de départ qui est choisi aléatoirement au sein de l'espace de phase discrétisé. L'expérience se poursuit en sélectionnant une variable d'entrée  $X_j$  parmi les  $N_e$ . Le point est alors déplacé au sein de l'espace des phases discrétisé selon soit "+"  $\Delta X_j$  ou "-"  $\Delta X_j$ . A l'issue de ce déplacement, un effet élémentaire est évalué (pour la variable  $X_j$  et l'expérience  $i$ ),

$$E_j^{(i)} = \frac{y(X_1, \dots, X_j \pm \Delta X_j, \dots, X_{N_e}) - y(X_1, \dots, X_j, \dots, X_{N_e})}{\Delta X_j} \quad (9)$$

L'expérience se poursuit en sélectionnant une nouvelle direction parmi les  $N_e - 1$  restantes et un nouvel effet élémentaire est estimé. L'expérience s'arrête lorsqu'un effet élémentaire a été calculé pour chaque variable d'entrée. Cette approche est alors répétée  $r$  fois ( $r$  étant généralement choisi entre 5 et 10) [4].

Une fois les  $r$  expériences réalisées, le plan d'expériences fournit un  $r$ -échantillon des effets pour chaque entrée  $X_j$ . Deux caractéristiques peuvent être estimées pour chaque paramètre d'entrée,  $\mu_j^*$  la moyenne des valeurs absolues des effets et  $\sigma_j^2$  l'écart type des effets,

$$\mu_j^* = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r |E_j^{*(i)}| \quad (10)$$

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \left( |E_j^{*(i)}| - \mu_j^* \right)^2 \quad (11)$$

$E_j^{*(i)}$  est l'effet élémentaire normé de  $E_j^{(i)}$ . L'approche de Morris consiste alors à tracer, sur une même figure, les résultats de chaque paramètre d'entrée selon les coordonnées  $(\mu_j^*, \sigma_j)$ . Cette représentation permet alors d'interpréter les résultats de cette analyse. Ainsi,

- plus  $\sigma_j$  est élevé par rapport à  $\mu_j^*$ , moins l'hypothèse de linéarité et de non interaction est pertinente,
- si  $\sigma_j \ll \mu_j^*$  et  $\mu_j^*$  est élevé, alors l'entrée  $X_j$  est influente sur la sortie du modèle  $y$ ,
- si  $\sigma_j$  et  $\mu_j^*$  sont du même ordre de grandeur, l'entrée  $X_j$  est fortement influente avec des effets non linéaires et ou d'interactions,
- si la sortie dépend linéairement de  $X_j$  et que  $X_j$  n'interagit pas avec les autres entrées  $X_k$ , les  $\mu_k^*$  sont égaux et  $\sigma_k$  est alors égale à 0.

**Travail 3** - Travail sur l'approche de Morris

- 3.1 - Sous Matlab, préparer un nouveau script qui permettra d'appliquer une approche de type Morris sur le modèle de flamme solide,  
 Pour la suite, chaque paramètre d'entrée sera considéré selon les domaines de variabilité suivants,  
 $\epsilon \in [0.1, 0.5]$ ,  $T \in [1100 \text{ K}, 1500 \text{ K}]$ ,  $D \in [0.25 \text{ m}, 0.75 \text{ m}]$  et  $H \in [1, 25 \text{ m}, 1, 75 \text{ m}]$  en fixant  $L = 2 \text{ m}$ .
- 3.2 - Quelles sont vos conclusions sur l'influence des paramètres d'entrée sur la sortie du modèle ? Faire varier le nombre de discrétisation de l'espace de phase en prenant comme base 10 éléments.
- 3.3 - Est-ce que ces nouvelles conclusions sont en adéquation avec celles qui avaient été obtenues à l'aide d'une analyse de sensibilité locale ?

**5 Analyse de sensibilité globale : indice de Sobol**

L'approche de Morris permet de hiérarchiser l'influence des paramètres d'entrée sur la sortie du modèle. Cependant, ce classement n'est en rien quantifiable et les interactions entre les paramètres d'entrée ne sont pas révélées. Une analyse de sensibilité globale *via* la détermination des indices de Sobol, permet d'obtenir plus d'informations sur le modèle étudié en levant ces limitations.

Afin d'apprécier l'influence du paramètre  $X_i$  à la variance de la sortie  $y$ , il convient de calculer la variance conditionnelle de  $y$  sachant  $X_i = X_i^*$ , notée  $V(y|X_i)$ . La vraie valeur  $X_i^*$  du paramètre  $X_i$  n'étant pas connue, il convient de prendre l'espérance de  $V(y|X_i)$ , pour toutes les valeurs possibles de  $X_i^*$ . Cette espérance est notée  $E(V(y|X_i))$ .

Plus le paramètre  $X_i$  contribuera à la variance de  $y$ , plus la quantité  $E(V(y|X_i))$  sera petite. L'espérance  $E(V(y|X_i))$  intervient dans l'expression de la variance totale de  $y$ , notée  $V(y)$ , qui se décompose ainsi :

$$V(y) = V(E(y|X_i)) + E(V(y|X_i)) \tag{12}$$

Le terme  $V(E(y|X_i))$  est la variance de l'espérance de  $y$  conditionnellement à  $X_i$ . Ce terme représente un indicateur de la sensibilité de  $y$  à  $X_i$ . En effet, plus le paramètre  $X_i$  contribuera à la variance de  $y$ , plus la quantité  $V(E(y|x_i))$  sera élevée. Afin d'utiliser un indicateur normalisé, l'indice de sensibilité de  $y$  au paramètre  $X_i$ , noté  $S_i$ , est défini par :

$$S_i = \frac{V(E(y|x_i))}{V(y)} \tag{13}$$

La valeur de l'indice de sensibilité  $S_i$  est comprise entre 0 et 1. Plus sa valeur sera proche de 1, plus le paramètre  $X_i$  contribuera à la variance de  $y$ . La somme des  $n$  indices de sensibilité associés à chaque paramètre  $X_i$  du modèle étudié vérifie la relation :

$$\sum_{i=1}^{N_e} S_i \leq 1 \tag{14}$$

Si le modèle étudié est additif, il peut se réécrire sous la forme :

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{N_e} y_i(X_i) \tag{15}$$

où  $a_0$  est une constante et les fonctions  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, N_e$ , sont éventuellement non linéaires en les paramètres. Dans le cas d'un modèle additif, on a  $\sum_{i=1}^{N_e} S_i = 1$ .

Si le modèle est non linéaire et non additif, l'interaction entre les différents paramètres va également influencer la variance de la sortie. Dans ce cas, l'indice  $S_i$  n'est plus l'indicateur approprié et on préfère l'indice de sensibilité totale, noté  $S_{T_i}$  et défini par :

$$S_{T_i} = 1 - \frac{V(E(y|X_{\sim i}))}{V(y)} \quad (16)$$

Le terme  $V(E(y|X_{\sim i}))$  représente la variance de l'espérance conditionnelle sachant tous les paramètres sauf  $X_i$ . L'indice de sensibilité totale  $S_{T_i}$  regroupe la contribution due au paramètre  $X_i$  seul, ce qui correspond à l'indice  $S_i$ , et la contribution due à l'interaction de  $X_i$  avec les autres paramètres. Cette dernière contribution donne également lieu à des indices de sensibilité "croisés" d'ordres supérieurs. Dans [5], il est montré que la variance totale de  $y$  peut se décomposer comme suit :

$$V(y) = \sum_{i=1}^{N_e} V_i + \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=i+1}^{N_e} V_{ij} + \dots + V_{12\dots N_e} \quad (17)$$

avec :

$$\begin{aligned} V_i &= V(E(y|X_i)) \\ V_{ij} &= V(E(y|X_i, X_j)) - V_i - V_j \\ &\vdots \end{aligned} \quad (18)$$

En divisant l'équation (17) par  $V(y)$  afin de normaliser les indicateurs, il vient :

$$1 = \sum_{i=1}^{N_e} S_i + \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=i+1}^{N_e} S_{ij} + \dots + S_{12\dots N_e} \quad (19)$$

où  $S_i$  représente l'indice de sensibilité du paramètre  $X_i$ , c'est-à-dire sa contribution seule à  $V(y)$ . Il est aussi appelé indice de sensibilité à l'ordre 1. Les termes  $S_{ij}$ , ...,  $S_{12\dots n}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{V_{ij}}{V(y)} \\ &\vdots \\ S_{12\dots N_e} &= \frac{V_{12\dots N_e}}{V(y)} \end{aligned} \quad (20)$$

Le terme  $S_{ij}$  représente la contribution due à l'interaction du paramètre  $x_i$  avec le paramètre  $x_j$ .  $S_{ij}$  est appelé indice de sensibilité à l'ordre 2. De même, le terme  $S_{12\dots N_e}$  représente la contribution due à l'interaction du paramètre  $X_i$  avec tous les autres paramètres et est appelé indice de sensibilité à l'ordre  $N_e$ . L'indice de sensibilité totale  $S_{T_i}$  du paramètre  $X_i$  est ainsi donné par :

$$S_{T_i} = S_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_e} S_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_e} \sum_{\substack{k=j+1 \\ k \neq i \\ j \neq i}}^{N_e} S_{ijk} + \dots + S_{ijk\dots N_e} \quad (21)$$

Les indices de sensibilité présentés précédemment peuvent parfois être calculés de façon analytique lorsque la fonction  $y$  du modèle étudié est connue. Cependant, même dans ce cas, si les équations du

modèle sont complexes et les paramètres nombreux, ce n'est pas toujours possible. Par conséquent, il est nécessaire de pouvoir estimer ces indices.

Il existe différentes techniques d'estimation des indices de sensibilité dans la littérature [1, 5, 6]. L'approche présentée ici est basée sur la méthode de Monte Carlo [5].

Supposons que l'on dispose d'un échantillon de taille  $N$  des  $N_e$  paramètres du modèle étudié, pris de façon aléatoire. On note  $X_i^k$  la  $k$ ème valeur du paramètre  $X_i$  issue de l'échantillon. L'estimée de l'espérance de  $y$ , notée  $\hat{E}(y)$ , est donnée par :

$$\hat{E}(y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(X_1^k, \dots, X_{N_e}^k) \quad (22)$$

De même, l'estimée de la variance de  $y$ , notée  $\hat{V}(y)$ , est donnée par :

$$\hat{V}(y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(X_1^k, \dots, X_{N_e}^k) - (\hat{E}(y))^2 \quad (23)$$

Dans [5], une estimation de la variance de  $y$  conditionnellement à  $X_i$  est proposée. Elle est basée sur l'estimation de l'espérance et nécessite deux échantillons des paramètres, afin de faire varier tous les paramètres sauf  $X_i$ .

Supposons que l'on dispose de deux échantillons de taille  $N$ . La  $k$ ème valeur du paramètre  $X_i$  issue de l'échantillon 1 est notée  $X_1^{k1}$  et celle issue de l'échantillon 2,  $X_i^{k2}$ . L'estimée de la variance de  $y$  conditionnellement à  $X_i$ , notée  $\hat{V}_i$ , est donnée par [5] :

$$\hat{V}_i = \hat{U}_i - (\hat{E}(y))^2 \quad (24)$$

avec  $\hat{U}_i$  donné par :

$$\begin{aligned} \hat{U}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N & y(X_1^{k1}, \dots, X_{i-1}^{k1}, X_i^{k1}, X_{i+1}^{k1}, \dots, X_{N_e}^{k1}) \\ & \times y(X_1^{k2}, \dots, X_{i-1}^{k2}, X_i^{k1}, X_{i+1}^{k2}, \dots, X_{N_e}^{k2}) \end{aligned} \quad (25)$$

L'estimée de l'indice de sensibilité de premier ordre  $\hat{S}_i$  est alors donnée par :

$$\hat{S}_i = \frac{\hat{V}_i}{\hat{V}(y)} \quad (26)$$

Par ailleurs, l'estimée de l'indice de sensibilité d'ordre 2  $\hat{S}_{ij}$  est donnée par :

$$\hat{S}_{ij} = \frac{\hat{V}_{ij}}{\hat{V}(y)} \quad (27)$$

avec  $\hat{V}_{ij}$  donné par :

$$\hat{V}_{ij} = \hat{U}_{ij} - (\hat{E}(y))^2 - \hat{V}_i - \hat{V}_j \quad (28)$$

où  $\hat{U}_{ij}$  est basée sur l'estimation de l'espérance en faisant varier tous les paramètres sauf  $X_i$  et  $X_j$  :

$$\begin{aligned} \hat{U}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N & y(X_1^{k1}, \dots, X_{i-1}^{k1}, X_i^{k1}, X_{i+1}^{k1}, \dots, X_{j-1}^{k1}, X_j^{k1}, X_{j+1}^{k1}, \dots, X_{N_e}^{k1}) \\ & \times y(X_1^{k2}, \dots, X_{i-1}^{k2}, X_i^{k1}, X_{i+1}^{k2}, \dots, X_{j-1}^{k2}, X_j^{k1}, X_{j+1}^{k2}, \dots, X_{N_e}^{k2}) \end{aligned} \quad (29)$$

Le même principe est appliqué pour estimer les indices d'ordre supérieur. Finalement, l'estimation de l'indice de sensibilité totale du paramètre  $X_i$  est donnée par :

$$\hat{S}_{Ti} = 1 - \frac{\hat{V}_{\sim i}}{\hat{V}(y)} \quad (30)$$

où  $\hat{V}_{\sim i}$  est l'estimation de la variance de  $y$  conditionnellement à tous les paramètres sauf  $X_i$ . Dans ce cas, tous les paramètres sont constants sauf  $X_i$  qui varie.  $\hat{V}_{\sim i}$  est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\sim i} &= \hat{U}_{\sim i} - (\hat{E}(y))^2 \\ \hat{U}_{\sim i} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(X_1^{k1}, \dots, X_{i-1}^{k1}, X_i^{k1}, X_{i+1}^{k1}, \dots, X_{N_e}^{k1}) \\ &\quad \times y(X_1^{k1}, \dots, X_{i-1}^{k1}, X_i^{k2}, X_{i+1}^{k1}, \dots, X_{N_e}^{k1}) \end{aligned} \quad (31)$$

L'avantage de cette approche est qu'elle permet d'estimer les indices d'ordre supérieur à 1 avec les effets dus aux interactions entre les paramètres d'entrée et les effets totaux. Cependant, cette technique nécessite deux échantillons pour estimer les indices du premier ordre, ce qui demande dans un certain nombre de cas, un coût de simulations relativement élevé.

#### Travail 4 - Travail sur l'analyse de sensibilité globale

- 4.1 - Sous Matlab, préparer un nouveau script qui permettra d'appliquer une analyse de sensibilité globale *via* les indices de Sobol, Pour la suite, chaque paramètre d'entrée sera considéré selon les domaines de variabilité suivants,  
 $\epsilon \in [0.1, 0.5]$ ,  $T \in [1100 \text{ K}, 1500 \text{ K}]$ ,  $D \in [0.25 \text{ m}, 0.75 \text{ m}]$  et  $H \in [1, 25 \text{ m}, 1, 75 \text{ m}]$  en fixant  $L = 2 \text{ m}$ .
- 4.2 - Déterminez les indices de sensibilité du 1er ordre et totaux pour chaque paramètre d'entrée.
- 4.3 - Est-ce que ces nouvelles conclusions sont en adéquation avec celles qui avaient été obtenues à l'aide des deux autres analyses de sensibilité ?
- 4.4 - Quels couples de paramètres possèdent des effets d'interaction sur la sortie du modèle ?

#### Travail 5 - Travail sur les fonctions de sensibilité

- 5.1 - Adaptez votre code Matlab pour répéter l'analyse de sensibilité globale plusieurs fois en faisant varier le paramètre  $L$ . On le fera évoluer de 1 m à 3 m.
- 5.2 - Tracez les évolutions de vos indices de sensibilité du premier ordre et totaux en fonction  $L$  : on parle maintenant de fonctions de sensibilité.
- 5.3 - Est-ce que le paramètre le plus influent sur la sortie à  $L = 2 \text{ m}$  l'est également sur toute la plage de 1 m à 3 m ?

## Références

- [1] J. Jacques, Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, 2005.
- [2] C.L. Beyler, Engineering Guide : Assessing Flame Radiation to External Targets from Pool Fires. Bethesda, MD : Society of Fire Protection Engineers, 1999.

- [3] M. Morris, Factorial sampling plans for preliminary computational experiments. *Technometrics*, Vol. 33, p. 161-174, 1991.
- [4] B. Iooss. Revue sur l'analyse de sensibilité globale de modèles numériques. *Journal de la Société Française de Statistique, Société Française de Statistique et Société Mathématique de France*, Vol. 152, p. 1-23, 2011.
- [5] I. Sobol', Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models, *Matematicheskoe Modelirovanie*, Vol. 2, p. 112-118, 1990 in Russian, translated in English in I. Sobol', Sensitivity analysis for non-linear mathematical models, *Mathematical Modeling & Computational Experiment*, Vol. 1, p. 407-414, 1993.
- [6] R.I. Cukier, H.B. Levine and K.E. Shuler, Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems, *J. Comp. Phys.*, Vol. 26, p. 1-42, 1978.