



Chapitre 2.

TRANSFERT DE CHALEUR

- 1 -

Bernard Porterie

IUSTI (UMR CNRS 7343)

Aix-Marseille Université

Pascal Boulet

LEMTA (UMR CNRS 7563)

Université de Lorraine

Denis Lemonnier

Institut Pprime (UPR 3346 CNRS)

Université de Poitiers

1. Introduction

Les milieux semi-transparents (MST) fluides ou solides transmettent partiellement le rayonnement électromagnétique à l'intérieur de certaines bandes spectrales en associant les processus optiques d'absorption, d'émission et de diffusion du rayonnement.

Les MST se différencient donc des milieux transparents dont l'absorption est nulle et des milieux opaques pour lesquels la transmission est nulle et qui ne peuvent échanger d'énergie que par des phénomènes de surface.

Dans les MST en écoulement, le rayonnement agit comme une source volumique qui modifie, par le couplage de la dynamique et de la thermique, les distributions de température et de flux qui s'établiraient en son absence.

Le calcul des sources et des flux radiatifs dans un MST peut être abordé de différentes manières. La distinction se fait, en particulier, entre :

- les méthodes *déterministes* qui reposent sur une approche continue et qui cherchent une solution approchée à l'Equation de Transfert Radiatif (ETR) comme celles des Ordonnées Discrètes, des Transferts Discrètes ou des Volumes Finis.

Elles associent une bonne précision à un traitement numérique aisé et peu coûteux en temps de calcul. Elles sont particulièrement appréciées en transferts couplés où le calcul des sources radiatives est répété itérativement.

- les méthodes *stochastiques* comme celle de Monte Carlo¹.

La MMC est très précise et coûteuse en temps de calcul. Elle est souvent mise en œuvre pour résoudre des problèmes thermiques au sein de milieux à structures complexes ou inhomogènes. La fiabilité de ses prédictions peut être regardée à l'égale d'expériences réelles dès lors que la description des phénomènes élémentaires et la caractérisation thermo-physique du milieu sont correctes. Elle sert souvent de référence notamment lorsqu'une comparaison avec l'expérience ne peut être faite. La puissance croissante des calculateurs et l'emploi du calcul parallèle permet aujourd'hui une utilisation plus fréquente de cette méthode.

La méthode de Monte Carlo consiste à modéliser un phénomène physique par une suite de processus aléatoires à l'issue desquels on calcule les variables d'état du système en moyennant les valeurs obtenues après un grand nombre d'épreuves. Ainsi, en transfert radiatif, on représente la propagation d'un ensemble de photons comme une succession d'événements élémentaires (émission, absorption, réflexion, diffusion, ...) dont les caractéristiques (direction d'émission, longueur parcourue avant absorption, ...) sont fixées de façon aléatoire. On suit pour cela des densités de probabilité telles que, après avoir simulé l'histoire d'un grand nombre de paquets de photons, les lois du rayonnement (émission-absorption par un élément de volume ou une surface, extinction de la luminance le long d'un chemin optique, ...) soient statistiquement vérifiées.

¹ Pour la petite histoire, la résolution statistique de problèmes mathématiques nécessite l'utilisation de nombres aléatoires qui peuvent être obtenus en lançant une bille dans une roulette qui tourne. C'est pourquoi cette méthode porte le nom de Monte Carlo, en référence à la principauté du même nom, célèbre pour son casino.

La MMC, décrite dans les ouvrages de base en rayonnement (Brewster, 1992 ; Howell et al., 2016 ; Modest, 1993), est surtout connue comme moyen efficace de calcul des facteurs de forme en géométries complexes. Son utilisation en MST remonte aux années 60. Elle est aussi utilisée en neutronique et dans le cadre plus général du transfert de chaleur, notamment celui de la conduction thermique, mais aussi plus récemment dans les jeux vidéo (texture, ombrage, ...).

L'objet de ce cours est de tenter de comprendre le rayonnement des MST en détaillant son calcul par la méthode de Monte Carlo.

2. **Fondements de la méthode de Monte Carlo**

Nous allons présenter les bases de la MMC à travers un exemple directement lié au transfert radiatif. Considérons un milieu gris (cad, un milieu dont les propriétés radiatives sont indépendantes de la longueur d'onde). En un point P du milieu, un paquet de photons est émis simultanément dans la direction $\vec{\Omega}$. Cet ensemble de photons constitue un quantum d'énergie qui, si le milieu est infini, va se propager dans la direction $\vec{\Omega}$ jusqu'à absorption totale. Si ce quantum est considéré comme indivisible, cette absorption ne sera pas graduelle, mais surviendra brutalement à une distance s du point P. Cette distance dépend du coefficient d'absorption κ du milieu, mais on ne peut pas la calculer de façon exacte. En effet, la seule loi dont nous disposons est la loi macroscopique d'atténuation de la luminance le long du chemin optique :

$$L(s) = L(0)\exp(-\kappa s) \quad (1)$$

Cette loi est une loi macroscopique en ce sens qu'elle ne s'applique de façon statistique qu'à un grand nombre de quanta. Elle ne s'applique donc pas à un événement microscopique isolé comme l'absorption d'un quantum. Par contre, en observant un grand nombre N de quanta émis à partir de P dans la direction $\vec{\Omega}$, et en enregistrant pour chacun d'eux la distance s parcourue avant absorption, nous disposerons d'une série de valeurs dont la répartition sur $[0, \infty[$ sera imposée par la loi macroscopique.

- 3 -

2.1 **Fonction de répartition et densité de probabilité**

Cette répartition peut être caractérisée en calculant la probabilité que s se trouve entre 0 et x , pour toute valeur de $x > 0$. En faisant décrire à x l'ensemble des valeurs possibles de s , c'est à dire de $[0, \infty [$, on construit la fonction de répartition :

$$F_s(x) = P(s \leq x) \quad x > 0$$

Par définition, $F_s(0) = 0$ et $F_s(\infty) = 1$

La probabilité de trouver s dans un intervalle $[a, b]$ est alors :

$$F_s(a \leq s \leq b) = F_s(b) - F_s(a)$$

Maintenant, si on réalise une partition de $[0, \infty [$ en segments de largeur Δx , on peut obtenir l'histogramme des valeurs de s en comptant celles qui se trouvent dans chacun des segments. Dans la limite d'un maillage infiniment fin, et en normalisant le comptage par le nombre total de quanta émis, l'histogramme prend la forme d'une courbe continue qui représente la densité de probabilité :

$$f_s(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq s \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f_s(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_s(x + \Delta x) - F_s(x)}{\Delta x} = \frac{dF_s(x)}{dx}$$

La densité de probabilité est ainsi la dérivée de la fonction de répartition.

Dans l'exemple que nous traitons, les lois statistiques f_s et F_s se déduisent directement de la loi macroscopique (1). En effet, on peut considérer que la luminance en P est proportionnelle au nombre de quanta émis : $L(0) \propto Nq$, q étant l'énergie d'un quantum dans l'unité de temps. A la distance x de P, la luminance vaut $L(x) \propto n(x)q$ où n est le nombre de quanta présents en x . La loi d'absorption s'écrit alors:

$$n(x)q = Nq \exp(-\beta x)$$

Le nombre de quanta absorbés dans un intervalle Δx au voisinage de x est :

$$\Delta n = N\kappa \exp(-\kappa x) \Delta x$$

La probabilité qu'un quantum soit absorbé ou diffusé dans cet intervalle est la probabilité que s soit comprise entre x et $x + \Delta x$, soit:

$$P(x \leq s \leq x + \Delta x) = \frac{\Delta n}{N} = \kappa \exp(-\kappa x) \Delta x$$

On en déduit alors la densité de probabilité (pdf) :

$$f_s(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq s \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = \kappa \exp(-\kappa x)$$

puis par intégration, la fonction de répartition (FdR) :

$$F_s(x) = \int_0^x f_s(x') dx' = 1 - \exp(-\kappa x)$$

$F_s(x)$ est la FdR imposée par la loi macroscopique d'atténuation, avec $0 \leq F_s(x) \leq 1$.

- 4 -

2.2 Estimation de la moyenne d'une variable aléatoire

Supposons que nous cherchions à calculer la longueur moyenne \bar{s} parcourue par les quanta émis de P dans la direction $\vec{\Omega}$. En termes de probabilité, cette moyenne correspond à l'espérance mathématique de la variable aléatoire s :

$$\bar{s} = E(s) = \int_0^{\infty} x f_s(x) dx$$

Nous voulons estimer \bar{s} en observant N émissions. Pour cela, on génère aléatoirement N valeurs de s tout en cherchant à respecter la densité de probabilité f_s afin que la loi macroscopique d'atténuation du rayonnement soit respectée.

Une estimation de la moyenne \bar{s} est obtenue par:

$$\tilde{s}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N s_k$$

On peut s'attendre à: $\tilde{s}_{\infty} = \bar{s}$.

2.3 Convergence de la méthode et estimation de l'erreur

En utilisant le théorème de la limite centrée, on montre que l'erreur décroît en $1/\sqrt{N}$, mais croît avec l'écart-type exact du phénomène, ce qui indique qu'un phénomène de grand écart type nécessitera un plus grand nombre d'épreuves pour que sa moyenne soit correctement calculée.

3. Mise en œuvre de la méthode de Monte Carlo

Appliquée aux transferts radiatifs, la MMC consiste à suivre l'histoire d'un quantum (supposé indivisible) de sa naissance à sa mort, c'est à dire depuis son émission jusqu'à son absorption. Le quantum peut être émis ou absorbé par une paroi ou un élément de volume. Entre temps, le quantum peut subir une réflexion sur une paroi ou une diffusion par le milieu.

On répète cette histoire de façon aléatoire un grand nombre de fois et l'on moyenne les résultats obtenus pour calculer les grandeurs macroscopiques recherchées : flux aux parois, sources volumiques, ...

3.1 Longueur parcourue avant absorption ou diffusion

Nous avons vu que, pour un milieu absorbant, la fonction de répartition de s était de la forme : $F_s(x) = 1 - \exp(-\kappa x)$. Lorsque le milieu est à la fois absorbant et diffusant, il suffit de remplacer κ par le coefficient d'extinction $\beta = \kappa + \sigma_s$ où σ_s est le coefficient de diffusion :

$$F_s(x) = 1 - \exp(-\beta x) \text{ où } 0 \leq F_s(x) \leq 1$$

Ainsi, après avoir déterminé la direction du quantum, sa longueur de parcours, avant absorption ou diffusion, est déterminée comme suit :

- 1) on génère un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 : R_k
- 2) on inverse la FdR pour trouver la distance parcourue : $s_k = -\frac{1}{\kappa} \ln(1 - R_k) = \frac{1}{\kappa} \ln(R_k)$
- 3) on répète les étapes 1 et 2 un très grand nombre de fois

Le quantum meurt par absorption ou diffusion. Dans ce dernier cas, le quantum meurt car il change de direction optique. Connaissant le point P d'émission, la direction d'émission et la distance parcourue par le quantum, on peut déterminer alors le point d'extinction P'.

La figure 1 donne, dans le cas où $\kappa = 1$, l'atténuation de la luminance obtenue en générant aléatoirement N valeurs de s_k . La solution exacte est ici $\exp(-x)$.

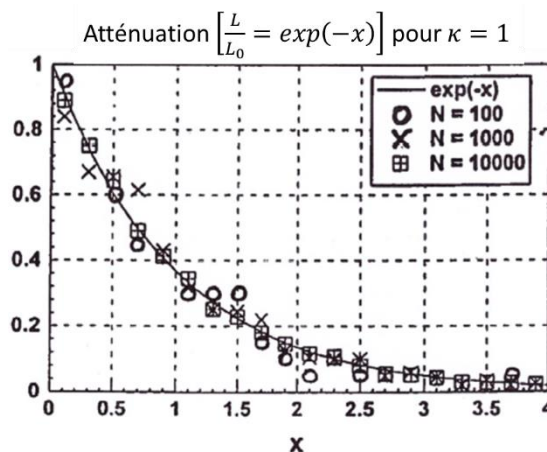


Figure 1

Deux cas se présentent :

- P' est à l'intérieur d'un élément de volume du milieu. Le quantum peut être alors absorbé ou diffusé par l'élément de volume ;
- P' est situé au-delà de la paroi. On calcule alors P'', intersection du segment PP' avec la paroi. Le quantum peut être alors absorbé ou réfléchi en P''.

3.2 Emission à partir d'une paroi

On considère une paroi grise d'émissivité ε sur laquelle on isole un élément de surface $dA(m^2)$ isotherme à la température $T(K)$.

Le flux émis par dA dans un angle solide $d\Omega$ autour de $\vec{\Omega}$ est (Figure 2):

$$dQ_{dA}(W) = \varepsilon \frac{\sigma T^4}{\pi} dA_p d\Omega = \varepsilon \frac{\sigma T^4}{\pi} dA \cos\theta d\Omega$$

où $L^0(T) = \sigma T^4/\pi$ représente l'émission du corps noir à la température T (hypothèse d'un milieu gris).

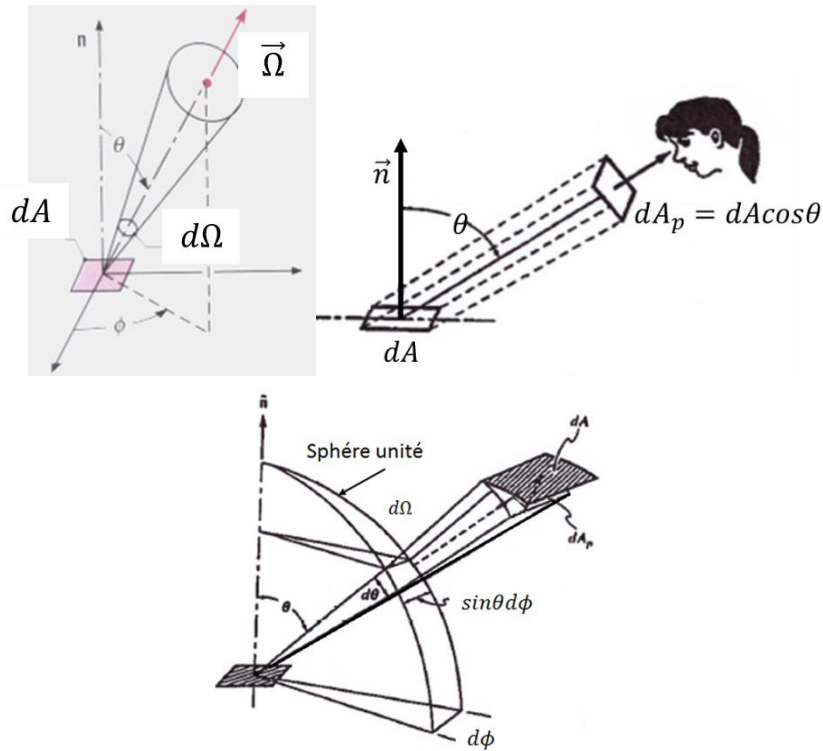


Figure 2

Or l'angle solide est égal à: $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, d'où :

$$dQ_{dA} = \varepsilon \frac{\sigma T^4}{\pi} dA \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi$$

Par intégration, le flux total émis dans le demi-espace est alors :

$$Q_{dA}(W) = \frac{\sigma T^4}{\pi} dA \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \varepsilon \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi$$

Dans le cadre de ce cours, nous n'envisagerons que le cas de parois à émission isotrope pour lesquelles l'émissivité n'est pas directionnelle $\varepsilon(\theta, \phi) = \varepsilon$, de sorte que :

$$Q_{dA}(W) = dA\varepsilon\sigma T^4$$

Si l'on veut simuler ce flux par l'émission de N quanta, l'énergie (par udt) transportée par chaque quantum doit donc être :

$$q(W) = \frac{Q_{dA}}{N} = \frac{dA\varepsilon\sigma T^4}{N}$$

Et la loi macro s'écrit :

$$dQ_{dA} = q \frac{N \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi}{\pi} \quad (2)$$

En pratique, l'émission d'un quantum correspond à la génération aléatoire des angles θ et ϕ suivant des lois de probabilités respectant la loi macroscopique (2).

Calculons les pdfs et FdRs des variables aléatoires indépendantes θ et ϕ .

Pour respecter la loi (2), le nombre de quanta émis entre $\theta = x$ et $x + \Delta x$, ϕ restant dans un intervalle donné $\Delta\phi$, doit donc être:

$$\frac{N\Delta\phi}{\pi} \cos x \sin x \Delta x$$

Pour cela, il faut que:

$$P(x \leq \theta \leq x + \Delta x) = \frac{\frac{N\Delta\phi}{\pi} \cos x \sin x \Delta x}{\frac{N\Delta\phi}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \sin x \Delta x} = 2 \cos x \sin x \Delta x$$

ce qui impose pour $0 \leq \theta \leq \pi/2$:

$$f_{\theta}(x) = 2 \cos x \sin x$$

et par intégration

$$F_{\theta}(x) = \sin^2 x$$

En procédant de même pour la variable ϕ , on obtient :

$$f_{\phi}(x) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{et} \quad F_{\phi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x dx = \frac{x}{2\pi}$$

On note que : $0 \leq F_{\theta}(x), F_{\phi}(x) \leq 1$.

Déroulement du calcul

- On génère 2 nombres aléatoires R_{θ} et R_{ϕ} compris entre 0 et 1
- On calcule θ en inversant la relation $R_{\theta} = \sin^2 \theta$, ce qui donne $\theta = \arcsin \sqrt{R_{\theta}}$
- On calcule ϕ en inversant la relation $R_{\phi} = \frac{\phi}{2\pi}$, ce qui donne $\phi = 2\pi R_{\phi}$

En conclusion, pour simuler le flux radiatif $Q_{dA}(W) = dA\epsilon\sigma T^4$ émis par un élément de surface dA , on envoie N quanta d'énergie $q(W) = Q_{dA}/N$ dans la direction $\theta = \arcsin \sqrt{R_{\theta}}$ et $\phi = 2\pi R_{\phi}$, où R_{θ} et R_{ϕ} sont générés aléatoirement.

3.3 Emission à partir d'un élément de volume du milieu

Le flux émis par un petit élément de volume dV (m^3) du milieu de coefficient d'absorption κ (m^{-1}), supposé isotherme, autour d'un point P est isotrope. Il s'écrit :

$$dQ_{dV}(W) = \kappa \frac{\sigma T^4}{\pi} dV d\Omega = \kappa \frac{\sigma T^4}{\pi} dV \sin \theta d\theta d\phi$$

et par intégration ($0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \phi \leq 2\pi$):

$$dQ_{dV}(W) = 4\kappa\sigma T^4 dV$$

Si l'on veut simuler ce flux par l'émission de N quanta, l'énergie véhiculée par chaque quantum doit donc être:

$$q(W) = \frac{Q_{dV}}{N} = \frac{4\kappa\sigma T^4 dV}{N}$$

et la loi macroscopique s'écrit:

$$dQ_{dV}(W) = q \frac{N \sin \theta d\theta d\phi}{4\pi}$$

Cela correspond aux pdf et FdR suivantes pour lois de probabilité suivantes, pour θ et ϕ :

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{2} \sin x \text{ et } F_{\theta}(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$$

$$f_{\phi}(x) = \frac{1}{2\pi} \text{ et } F_{\phi}(x) = \frac{x}{2\pi}$$

avec toujours : $0 \leq F_{\theta}(x), F_{\phi}(x) \leq 1$.

Déroulement du calcul

- On génère 2 nombres aléatoires R_{θ} et R_{ϕ} compris entre 0 et 1
- On calcule θ en inversant la relation $R_{\theta} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$, ce qui donne $\theta = \arccos(1 - 2R_{\theta})$
- On calcule ϕ en inversant la relation $R_{\phi} = \frac{\phi}{2\pi}$, ce qui donne $\phi = 2\pi R_{\phi}$

En conclusion, pour simuler le flux radiatif $Q_{dV}(W) = 4\kappa\sigma T^4 dV$ émis par un élément de volume dV , on envoie N quanta d'énergie $q(W) = Q_{dV}/N$ dans la direction $\theta = \arccos(1 - 2R_{\theta})$ et $\phi = 2\pi R_{\phi}$, où R_{θ} et R_{ϕ} sont générés aléatoirement.

3.4 Absorption ou diffusion par un élément de volume du milieu

Pour un milieu absorbant-diffusant, on définit l'albédo ω par:

$$\omega = \frac{\sigma_s}{\beta} = \frac{\sigma_s}{\kappa + \sigma_s}$$

- 8 - avec

$$\underbrace{0}_{\substack{\text{milieu} \\ \text{purement} \\ \text{absorbant} \\ (\sigma_s=0)}} \leq \omega \leq \underbrace{1}_{\substack{\text{milieu} \\ \text{purement} \\ \text{diffusant} \\ (\kappa=0)}}$$

Puisque l'albédo est compris entre 0 et 1, on peut directement relier la valeur locale de l'albédo à la probabilité qu'un quantum soit diffusé ou absorbé par un élément de volume centré en P' :

$$P(q \text{ diffusé}) = \omega$$

$$P(q \text{ absorbé}) = 1 - \omega$$

Si donc R_{ω} est un nombre aléatoire sur $[0, 1]$, on aura :

$$R_{\omega} \geq \omega \rightarrow \text{absorption}$$

$$R_{\omega} < \omega \rightarrow \text{diffusion}$$

S'il y a absorption, l'élément de volume centré en P' récupère l'énergie du quantum. S'il y a diffusion, l'élément de volume ne récupère aucune énergie. Si la diffusion est isotrope, la direction est générée comme s'il s'agissait d'une émission à partir de P'. Si la diffusion est anisotrope, la direction est générée en respectant la fonction de phase.

3.5 Absorption ou réflexion par une paroi

La probabilité qu'un quantum soit réfléchi ou absorbé par un élément de paroi centré en P'' est directement relié à son émissivité ε ou à son coefficient de réflexion $\rho=1-\varepsilon$ (matériau opaque). De sorte que :

$$P(q \text{ réfléchi}) = 1 - \varepsilon$$

$$P(q \text{ absorbé}) = \varepsilon$$

Si donc R_ε est un nombre aléatoire sur $[0, 1]$, on aura :

$$R_\varepsilon \leq \varepsilon \rightarrow \text{absorption}$$

$$R_\varepsilon > \varepsilon \rightarrow \text{diffusion}$$

S'il y a absorption, l'élément de paroi centré en P'' récupère l'énergie du quantum. S'il y a diffusion, l'élément de paroi ne récupère aucune énergie. Si la paroi est à réflexion diffuse, la direction est générée comme s'il s'agissait d'une émission à partir de P'' .

3.6 Cas non gris

Dans le cas d'un milieu non gris, les propriétés radiatives du milieu dépendent de la longueur d'onde qui devient à son tour une variable aléatoire. Par exemple, pour simuler l'émission d'un quantum, il faudra déterminer aléatoirement non seulement la direction d'émission, la longueur parcourue mais aussi la longueur d'onde.

4. Algorithme général de la méthode de Monte Carlo

4.1 Milieu à température imposée

Le but est ici de calculer le champ des sources radiatives (ie, $S_R = -\text{div} \mathbf{q}_R$) et les flux radiatifs incidents aux parois, connaissant la température en tout point du domaine.

Pour un élément de volume dV , le flux radiatif net est la différence entre le flux absorbé et le flux émis, donnés par :

$$Q_{dV, \text{absorbé}} = \sum_{n=1}^{N_{dV}} q_n$$

$$Q_{dV, \text{émis}} = 4\kappa\sigma T^4 dV$$

où N_{dV} est le nombre de quanta q_n absorbés par dV .

La source radiative locale s'écrit alors :

$$S_R = \frac{Q_{dV, \text{absorbé}} - Q_{dV, \text{émis}}}{dV} = \frac{1}{dV} \sum_{n=1}^{N_{dV}} q_n - 4\kappa\sigma T^4$$

et la densité de flux radiatif incident sur un élément de paroi dA par :

$$dQ_{dA} = \frac{1}{dA} \sum_{n=1}^{N_{dA}} q_n$$

où N_{dA} est le nombre de quanta q_n absorbés par dA .

Déroulement du calcul

Pour chaque élément de volume ou de paroi susceptible d'émettre, on procède de la façon suivante :

1. On se fixe un nombre de quanta à émettre N
2. On attribue à chaque quantum une énergie : $q = \varepsilon\sigma T^4 dA/N$ ou $q = 4\kappa\sigma T^4 dV/N$
3. On envoie un quantum
4. On génère R_θ et R_ϕ pour calculer la direction d'émission:
 - Si dA : $(\theta, \phi) = (\arcsin\sqrt{R_\theta}, 2\pi R_\phi)$
 - Si dV : $(\theta, \phi) = (\arccos(1 - 2R_\theta), 2\pi R_\phi)$
5. On génère R_s pour calculer la distance parcourue avant absorption ou diffusion:

$$s = -\ln R_s / \beta$$

6. On calcule la position du point d'extinction P':
 - Si P' ∈ milieu, on génère R_ω et on compare à ω (abs. ou diffusion)
 - Si P' au-delà de la paroi, on génère R_ε et on compare à ε (abs. ou réflexion)
7. Si absorption par dA (ou dV), on affecte +q à dA (ou dV) et on passe à l'étape 3
8. Si réflexion (ou diffusion), on retourne à l'étape 4 sans affecter d'énergie à dA (ou dV)
9. Après avoir émis N quanta, on passe à l'élément d'émission suivant
10. Lorsque tous les éléments d'émission ont été parcourus, on calcule les sources radiatives et les flux pariétaux

Application 1D : calcul des sources radiatives dans un milieu gris absorbant-diffusant à température imposée ($T = T_m$) placé entre deux parois diffuses à $T = 0$ (figure 3).

Le problème étant unidimensionnel, on divise le milieu en tranches i ($i = 1, 2, \dots, imax$) de largeur Δx et l'on définit :

- L'épaisseur optique totale : $\tau = \beta L$ (sans dimension)
- L'épaisseur optique d'une maille : $\Delta\tau = \tau / imax = \beta \Delta x$

Le flux émis par la tranche i s'écrit :

$$Q_i^{emis} = 4\kappa\Delta x A\sigma T_m^4 = 4(1 - \omega)\Delta\tau A\sigma T_m^4$$

où A est une surface arbitraire dans le plan perpendiculaire à x .

Si N est le nombre de quanta émis par la tranche i , l'énergie transportée par chaque quantum est :

$$q = \frac{Q_i^{emis}}{N} = \frac{4(1 - \omega)\Delta\tau}{N} A\sigma T_m^4$$

Si n_i est le nombre de quanta absorbés par la tranche i , la source radiative devient :

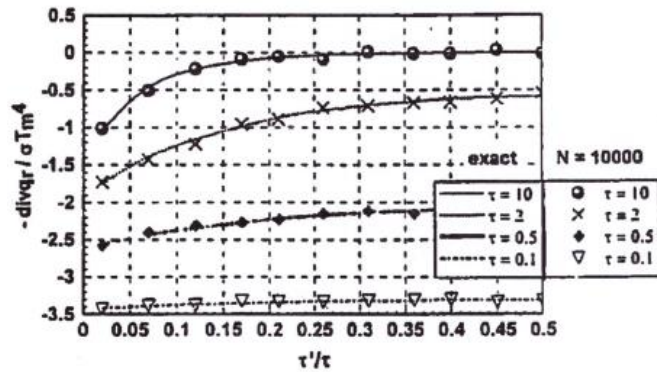
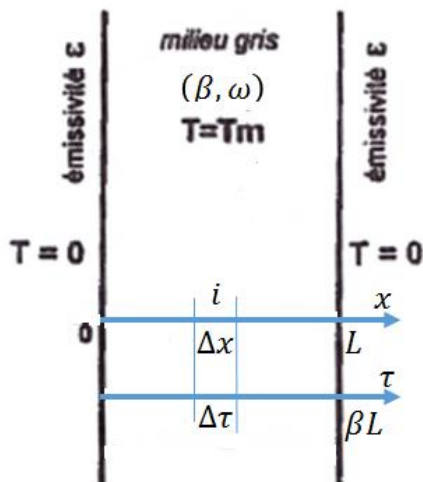
$$S_R = \frac{n_i q - Q_i^{emis}}{dV} = \frac{q}{A\Delta x} (n_i - N)$$

Et la densité de flux reçue par chaque paroi vaut :

$$q_1 = \frac{q}{A} n_{p1} \text{ et } q_2 = \frac{q}{A} n_{p2}$$

n_{p1} et n_{p2} étant le nombre de quanta absorbés en $x = 0$ et $x = L$.

La solution exacte est comparée à celle de Monte Carlo pour différentes épaisseurs optiques (Figure 4) sur un demi domaine (le problème étant symétrique, $q_1 \sim q_2$, aux erreurs statistiques près).



4.2 Milieu à l'équilibre radiatif

Un milieu à l'équilibre radiatif se caractérise par $S_R = -\text{div}\mathbf{q}_R = \mathbf{0}$, l'émission en tout point étant compensée par l'absorption. La mise en œuvre de la MMC est alors simplifiée en considérant que tout quantum absorbé est immédiatement réémis à partir du point d'absorption.

Seuls les éléments de paroi sont susceptibles d'émettre du rayonnement. Le but est ici de calculer la température du milieu et les flux radiatifs incidents aux parois.

Déroulement du calcul

Pour chaque élément de paroi susceptible d'émettre, on procède de la façon suivante :

1. On se fixe un nombre de quanta à émettre N
2. On attribue à chaque quantum une énergie: $q = \varepsilon\sigma T_p^4 dA/N$
3. On envoie un quantum
4. On génère R_θ et R_ϕ pour calculer la direction d'émission : $(\theta, \phi) = (\arcsin\sqrt{R_\theta}, 2\pi R_\phi)$
5. On génère R_s pour calculer la distance parcourue avant absorption ou diffusion :

$$s = -\ln R_s/\beta$$
6. On calcule la position du point d'extinction P' :
 - Si $P' \in$ milieu, on génère R_ω et on compare à ω (abs. ou diffusion)
 - Si P' au-delà de la paroi, on génère R_ε et on compare à ε (abs. ou réflexion)
7. Si absorption par élément de volume, on attribue $+q$ à dV , et on réémet un nouveau quantum dans la direction : $(\theta, \phi) = (\arccos(1 - 2R_\theta), 2\pi R_\phi)$ et on retourne à l'étape 5
8. Si absorption par élément de paroi, $+q$ à dA et on retourne à l'étape 4
9. Après avoir émis N quanta, on passe à l'élément d'émission de paroi suivant
10. Lorsque tous les éléments d'émission ont été parcourus, on calcule la température du milieu et les flux pariétaux

- 11 -

Application 1D : calcul de la température d'un milieu gris absorbant-diffusant placé entre deux parois diffuses, l'une chaude à T_p et l'autre paroi froide à $T = 0$ (figure 5).

Seule la paroi chaude émet et si N est le nombre de quanta émis, par dA , l'énergie de chaque quantum est alors:

$$q = \frac{Q_{\text{paroi}}^{\text{émis}}}{N} = \frac{\varepsilon}{N} A \sigma T_p^4$$

La source radiative étant nulle, ce qui est absorbé par la tranche i est réémis :

$$n_i q = Q_i^{\text{émis}} \rightarrow n_i \frac{\varepsilon}{N} A \sigma T_p^4 = 4(1 - \omega) \Delta\tau A \sigma T_i^4$$

On en déduit la température adimensionnée

$$\left(\frac{T_i}{T_p}\right)^4 = \frac{n_i}{4(1 - \omega) \Delta\tau N} \varepsilon$$

La figure 6 donne les profils de température adimensionnée pour une diffusion isotrope. Il existe une solution exacte et les résultats obtenus pour $N=10^6$ quanta en sont très proches.

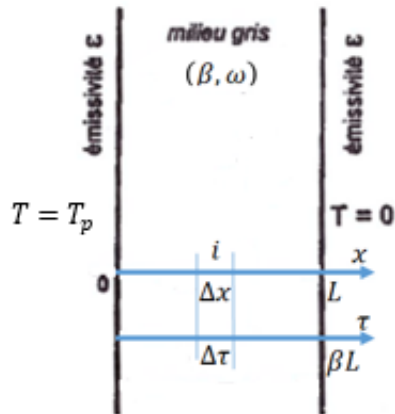


Figure 5

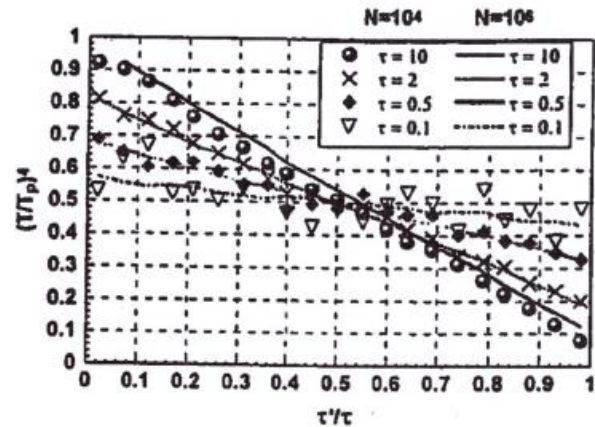


Figure 6

5. Applications

La simplicité de mise en œuvre de la MMC est illustrée à travers différents exemples d'application :

- Rayonnement d'une source dans une enceinte 2D
- Rayonnement d'une flamme verticale
- Rayonnement d'un panneau vertical
- Evaluation de l'efficacité du débroussaillage autour d'une habitation exposée au rayonnement d'un feu de végétation
- Evaluation de l'efficacité d'une coupure de combustible à l'interface forêt / habitat
- Rayonnement dans un milieu diphasique gaz/gouttelettes d'eau (rideaux d'eau)
- Rayonnement dans un milieu gazeux chargé en particules de suie pour évaluer l'opacité des fumées d'incendie et la visibilité en lien avec la problématique de l'évacuation et de la mise en sécurité des personnes

- 12 -

6. Conclusion

La MMC évolue sans cesse (quantum divisible, modèle de flamme solide volumique, MMC réciproque, etc.) et les moyens de calcul actuels permettent son utilisation plus fréquente.

Nous espérons que ce cours aura permis de démystifier, sinon rendre plus claire, la MMC et favorisera son utilisation pour calculer le rayonnement dans des milieux complexes et/ou en transferts couplés.

Certains codes de calcul par la MMC sont disponibles sur simple demande auprès des auteurs.

7. Références

- Brewster, M.Q., Thermal Radiative Transfer and Properties, John Wiley and Sons, New York, 1992.
- Howell J.R., Siegel R., Mengüç M.P., Thermal Radiation Heat Transfer, 5th ed., CRC Press, New York, 2016.
- Modest, M. F., 1993, Radiative Heat Transfer, McGraw-Hill, New York.