Quelques résultats théoriques sur la ventilation naturelle (non-Boussinesq)

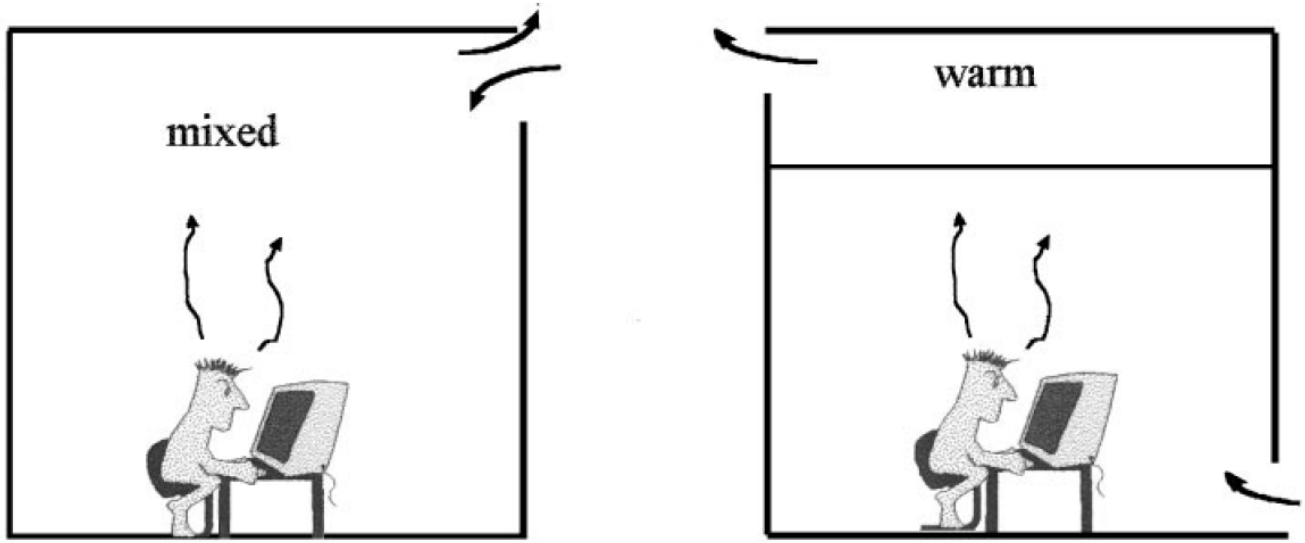
Olivier Vauquelin

Ventilation naturelle

Ecoulements d'échanges (naturels) entre l'intérieur (d'une enceinte) et l'extérieur (ambiance)

Application « bâtiment »

— Source(s) de flottabilité (et de masse) dans le bâtiment
— Ouverture(s) vers l'extérieur
— Effets du vent aux ouvertures
— Pas de ventilation mécanique



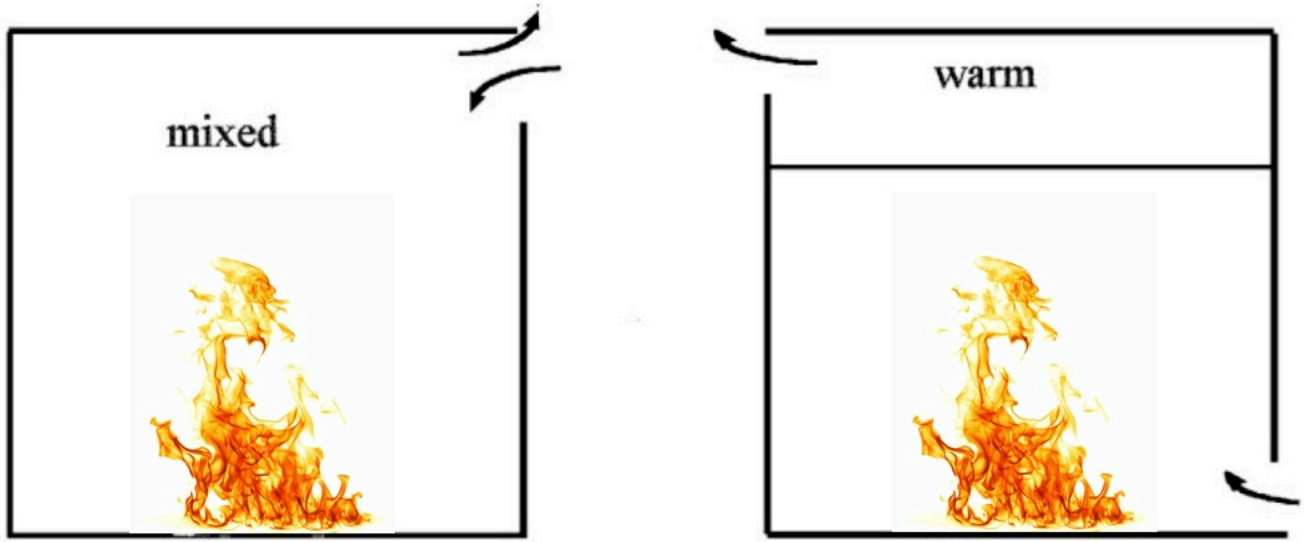
Ventilation par mélange et ventilation par déplacement (Linden, ARFM 99)

Ventilation naturelle

Ecoulements d'échanges (naturels) entre l'intérieur (d'une enceinte) et l'extérieur (ambiance)

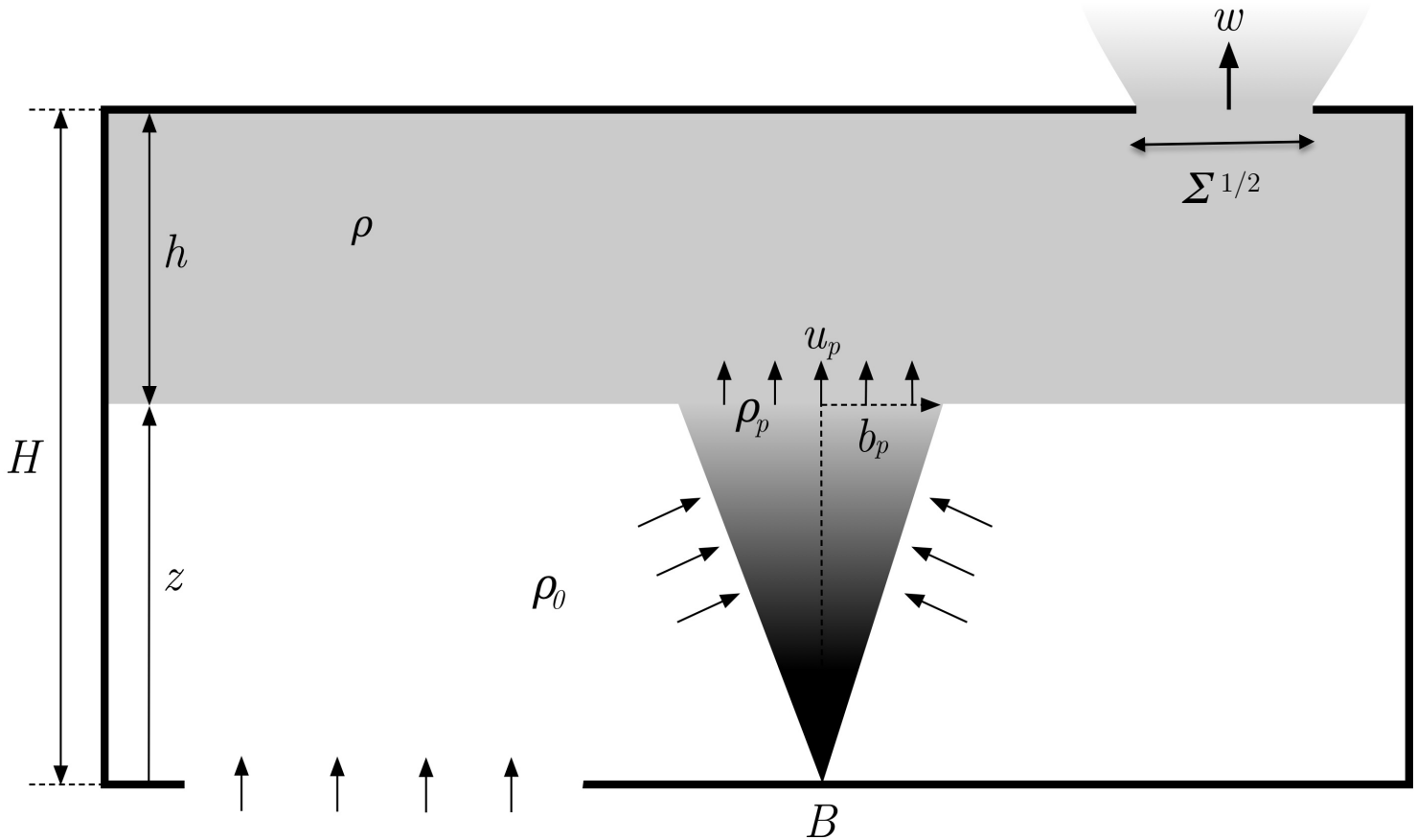
Application « bâtiment »

— Source(s) de flottabilité (et de masse) dans le bâtiment
— Ouverture(s) vers l'extérieur
— Effets du vent aux ouvertures
— Pas de ventilation mécanique



Ventilation par mélange et ventilation par déplacement (Linden, ARFM 99)

Ventilation naturelle par déplacement



$$B(m^4 s^{-3}) = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g q \qquad \left[B = \frac{g}{\rho_0 T_0 C_p} \dot{Q} \right]$$

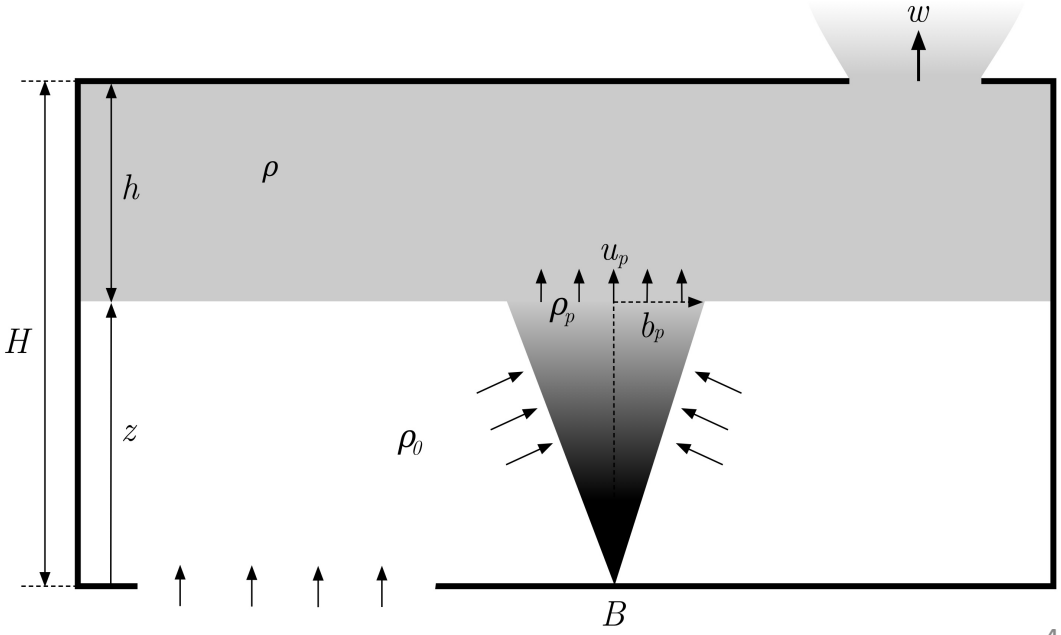
$$\dot{Q}(W) = \rho C_p q \Delta T$$

Ventilation naturelle par déplacement
Modélisation analytique

Emptying-Filling box model (Linden, Lane-Serff & Smeed, JFM 90)

— Modèle du panache pur (Morton, Taylor & Turner, PRSL 56)
— Ecoulements monodirectionnels aux ouvertures
— Masse volumique homogène dans la couche
— Approximation de Boussinesq

=> Extension au cas général non-Boussinesq

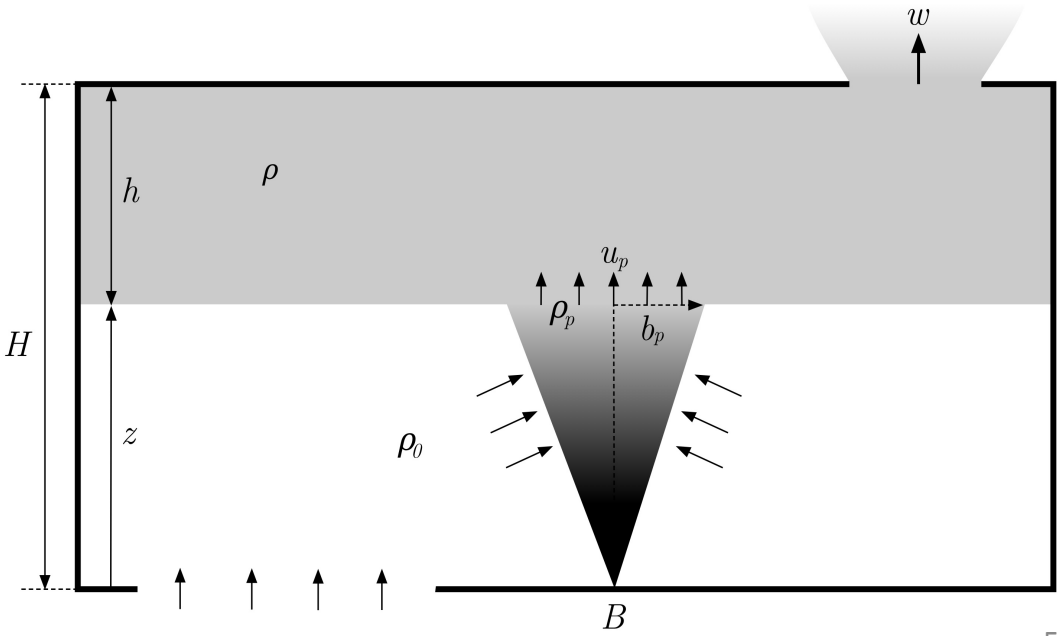


Ventilation naturelle par déplacement
Modélisation analytique non-Boussinesq

$$\frac{d\rho S h}{dt} = \rho_p \pi b_p^2 u_p \big|_{z=H-h} - \rho w \Sigma$$

$$\frac{d}{dt}\left[g\frac{\Delta\rho}{\rho_0} S h\right] = B - g\frac{\Delta\rho}{\rho_0} w \Sigma$$

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{w}{C_d}\right)^2 = \Delta\rho g h$$



Ventilation naturelle par déplacement
Modélisation analytique non-Boussinesq

$$\frac{d\rho S h}{dt} = \rho_p \pi b_p^2 u_p \Big|_{z=H-h} - \rho w \Sigma$$

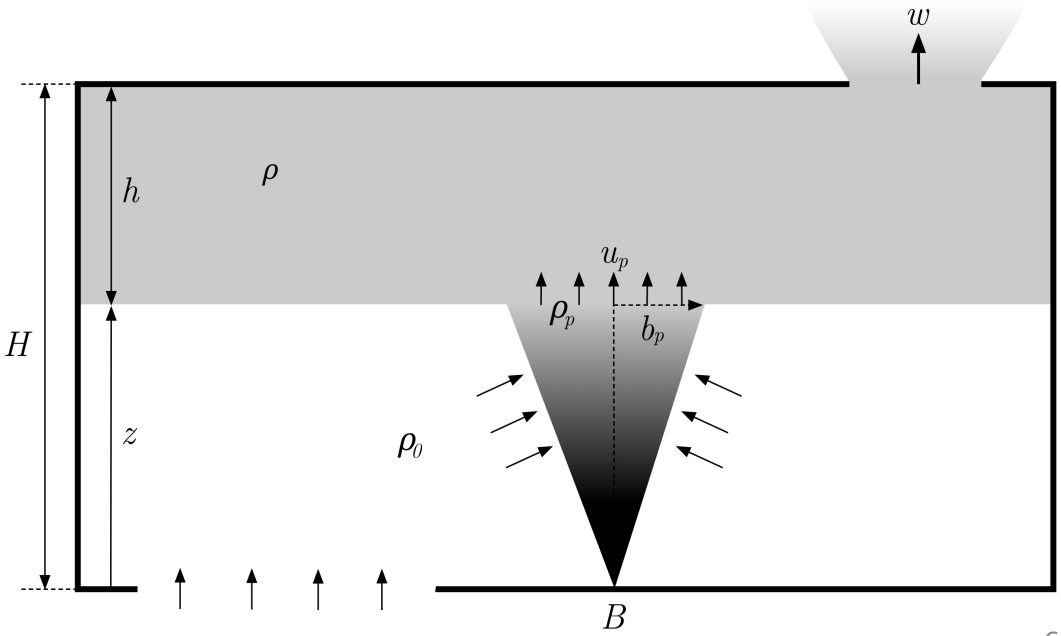
$$\frac{d}{dt}\left[g\frac{\Delta\rho}{\rho_0} S h\right] = B - g\frac{\Delta\rho}{\rho_0} w \Sigma$$

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{w}{C_d}\right)^2 = \Delta\rho g h$$

$$u_p(z) = A^{1/3} B^{1/3} z^{-1/3}$$

$$b_p(z) = \frac{6\alpha}{5} z \left[\frac{\rho_0}{\rho_p(z)}\right]^{1/2} = \frac{6\alpha}{5} z \sqrt{1+\eta_p(z)}$$

$$\eta_p(z) = \frac{\rho_0 - \rho_p(z)}{\rho_p(z)} = \frac{4}{3g} A^{2/3} B^{2/3} z^{-5/3}$$



Ventilation naturelle par déplacement
Modélisation analytique non-Boussinesq

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \Lambda\,\omega - \kappa\,\Theta^{1/2}(\zeta^{5/3} + \Theta)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{1+\eta}{1-\zeta}\kappa\,\Theta^{1/2}(\Theta - \eta\zeta^{5/3})$$

$$\omega = \sqrt{\eta(1-\zeta)}$$

Variables sans dimension / Paramètres de contrôle

$$\zeta = \frac{z}{H} \qquad \eta = \frac{\Delta\rho}{\rho} \qquad \omega = \frac{w}{\sqrt{gH}}$$

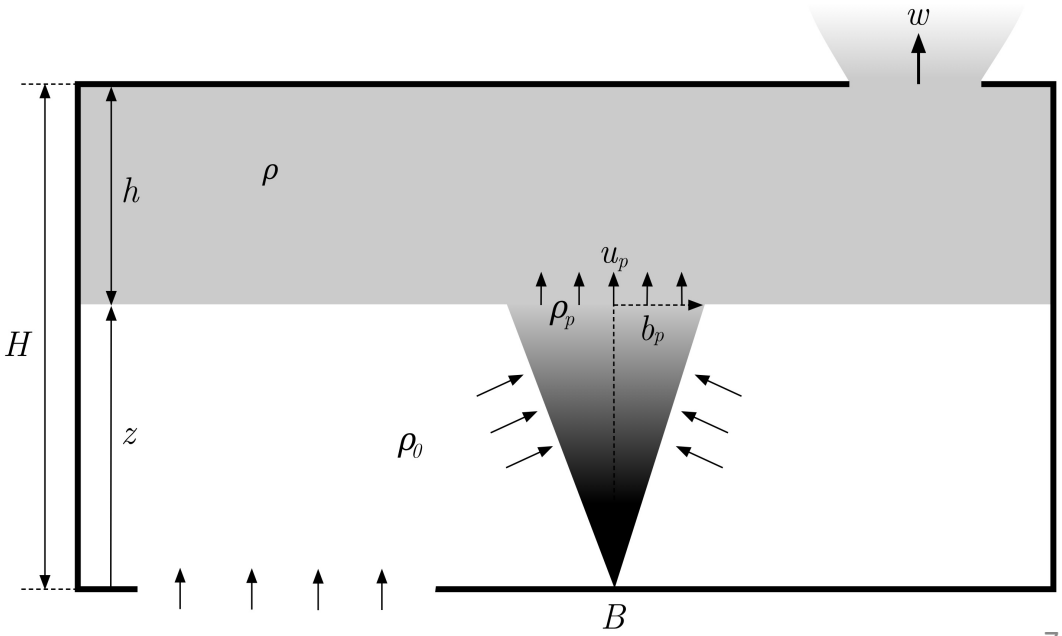
$$\Lambda = \frac{\Sigma}{H^2} \qquad \Theta = \frac{4A^{2/3}}{3g}\frac{B^{2/3}}{H^{5/3}}$$

Solution stationnaire

$$\frac{\zeta_{ss}^{5/3}(\zeta_{ss}^{5/3} + \Theta)^2}{1-\zeta_{ss}} = \frac{\Lambda^2}{\kappa^2}$$

$$\eta_{ss} = \frac{\Theta}{\zeta_{ss}^{5/3}}$$

$$\omega_{ss} = \frac{\kappa\Theta^{1/2}}{\Lambda}(\zeta_{ss}^{5/3} + \Theta)$$



Ventilation naturelle par déplacement
Modélisation analytique non-Boussinesq

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \Lambda\,\omega - \kappa\,\Theta^{1/2}(\zeta^{5/3} + \Theta)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{1+\eta}{1-\zeta}\kappa\,\Theta^{1/2}(\Theta - \eta\zeta^{5/3})$$

$$\omega = \sqrt{\eta(1-\zeta)}$$

Variables sans dimension / Paramètres de contrôle

$$\zeta = \frac{z}{H} \qquad \eta = \frac{\Delta\rho}{\rho} \qquad \omega = \frac{w}{\sqrt{gH}}$$

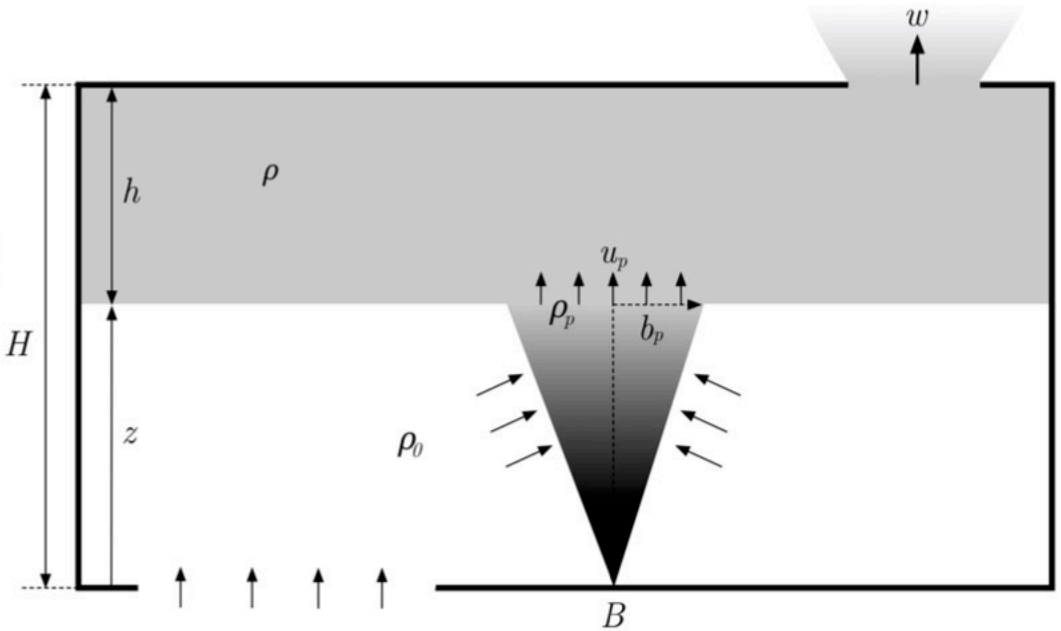
$$\Lambda = \frac{\Sigma}{H^2} \qquad \Theta = \frac{4A^{2/3}}{3g}\frac{B^{2/3}}{H^{5/3}}$$

Solution stationnaire

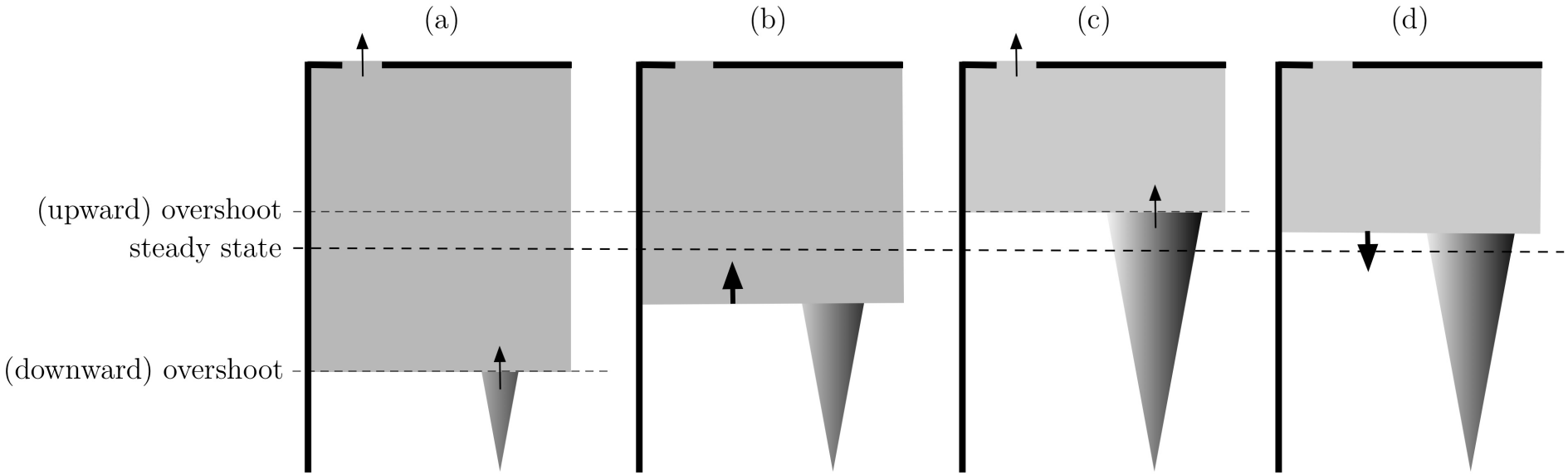
$$\frac{\zeta_{ss}^{5/3}(\zeta_{ss}^{5/3} + \Theta)^2}{1-\zeta_{ss}} = \frac{\Lambda^2}{\kappa^2}$$

$$\eta_{ss} = \frac{\Theta}{\zeta_{ss}^{5/3}}$$

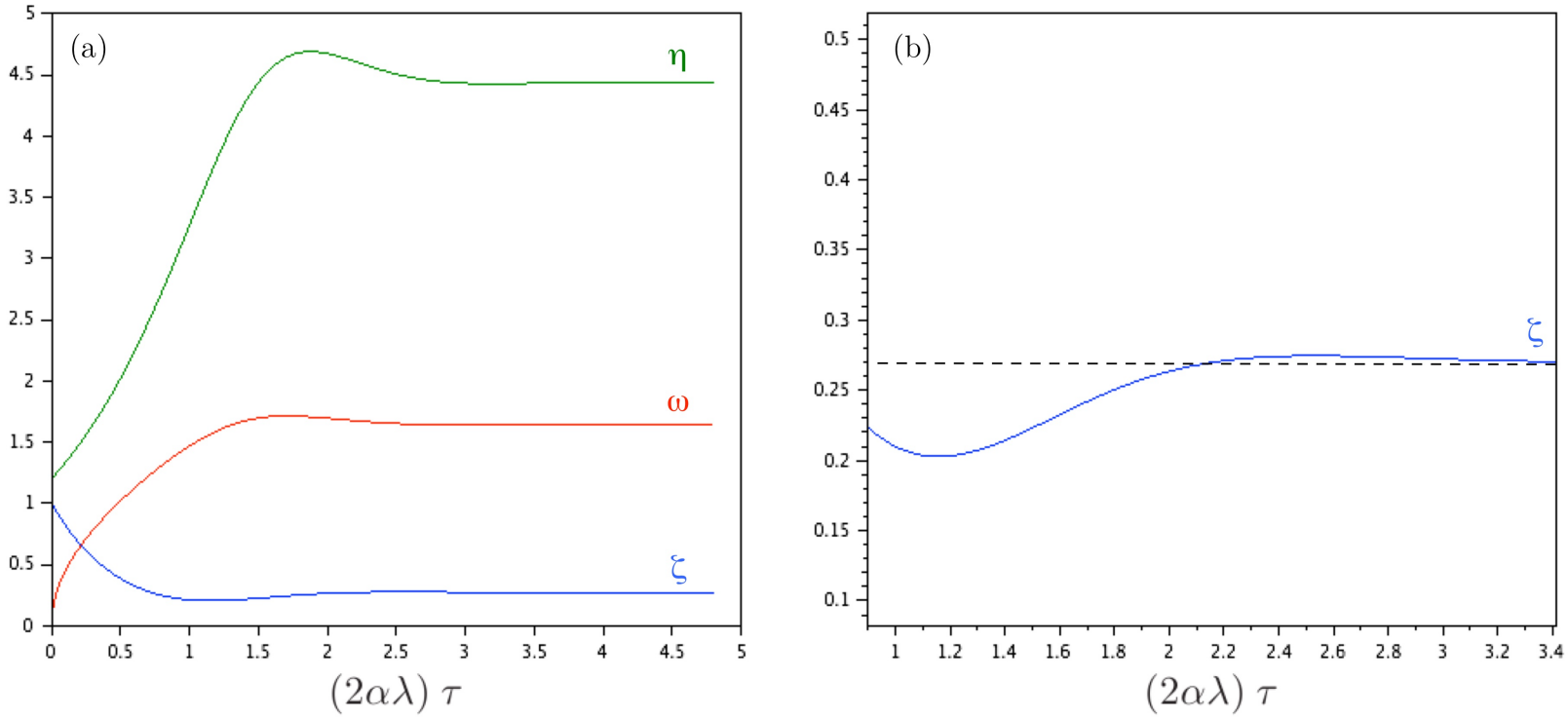
$$\omega_{ss} = \frac{\kappa\Theta^{1/2}}{\Lambda}(\zeta_{ss}^{5/3} + \Theta)$$



Modélisation analytique non-Boussinesq
Un système oscillant ?



Modélisation analytique non-Boussinesq
Résolution numérique



Modélisation analytique non-Boussinesq
Linéarisation des équations

$$\zeta = \zeta_{ss} + \zeta' \qquad \eta = \eta_{ss} + \eta' \qquad \omega = \omega_{ss} + \omega'$$

$$\frac{d\zeta'}{d\tau} = \Lambda\omega' - \frac{5}{3}\kappa\Theta^{1/2}\zeta_{ss}^{2/3}\zeta'$$

$$\frac{d\eta'}{d\tau} = -\kappa\Theta^{1/2}\frac{1+\eta_{ss}}{1-\zeta_{ss}}\zeta_{ss}^{2/3}\left(\frac{5}{3}\eta_{ss}\zeta' + \zeta_{ss}\eta'\right)$$

$$\omega' = -\frac{1}{2\omega_{ss}}\left[\eta_{ss}\zeta' - (1-\zeta_{ss})\eta'\right]$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\begin{pmatrix}\zeta'\\ \eta'\\ \omega'\end{pmatrix} + A_1\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\zeta'\\ \eta'\\ \omega'\end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix}\zeta'\\ \eta'\\ \omega'\end{pmatrix} = 0$$

Modélisation analytique non-Boussinesq
Conditions des régimes oscillants

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\begin{pmatrix}\zeta'\\ \eta'\\ \omega'\end{pmatrix} + A_1\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\zeta'\\ \eta'\\ \omega'\end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix}\zeta'\\ \eta'\\ \omega'\end{pmatrix} = 0$$

— A_1 et A_2 sont des fonctions de Λ, Θ et ζ_{ss}

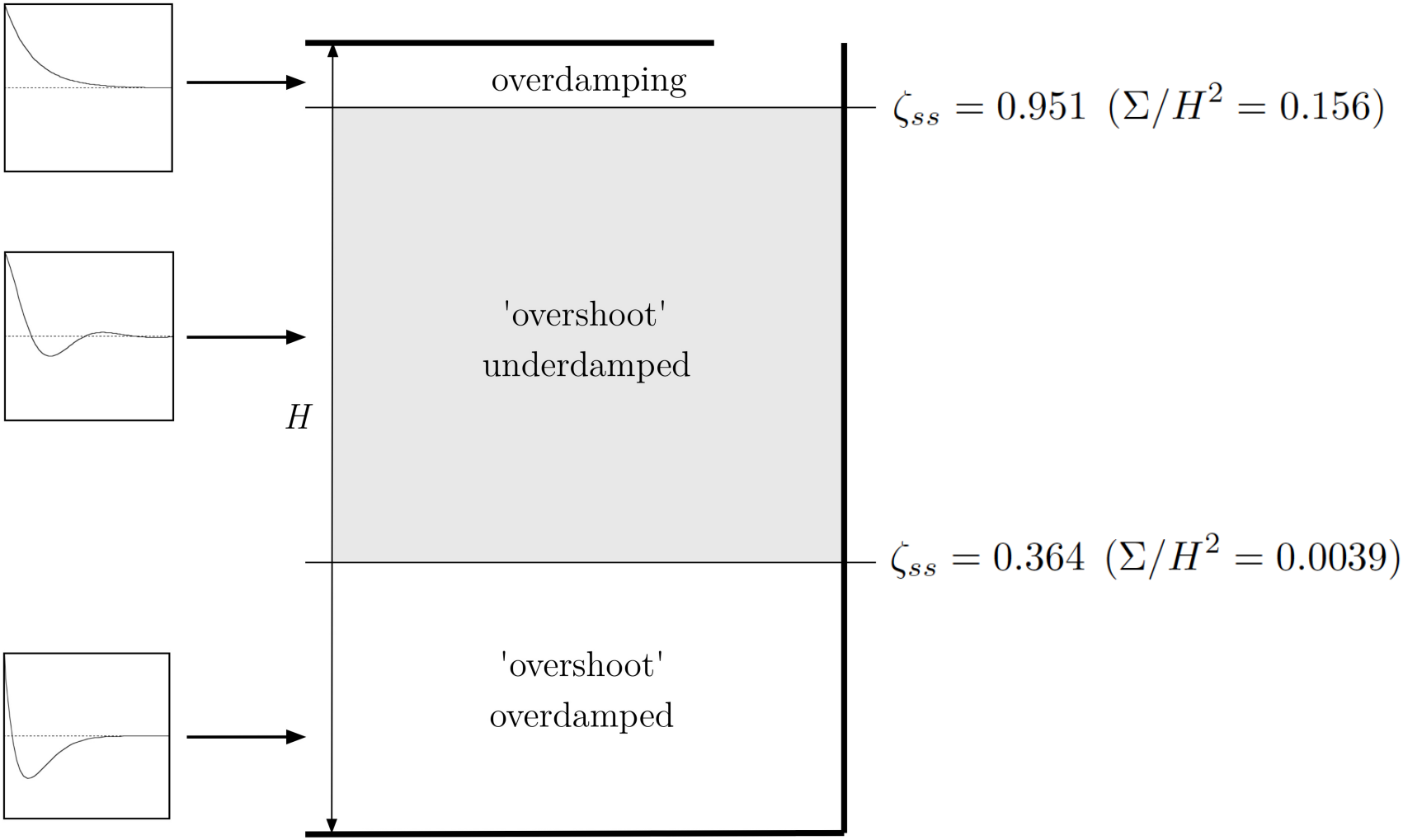
— Le régime oscillant sous-amorti est obtenu si $A_1^2 < 4\,A_2$

— Dans le cas où $\Theta \approx 0$ (approximation de Boussinesq)

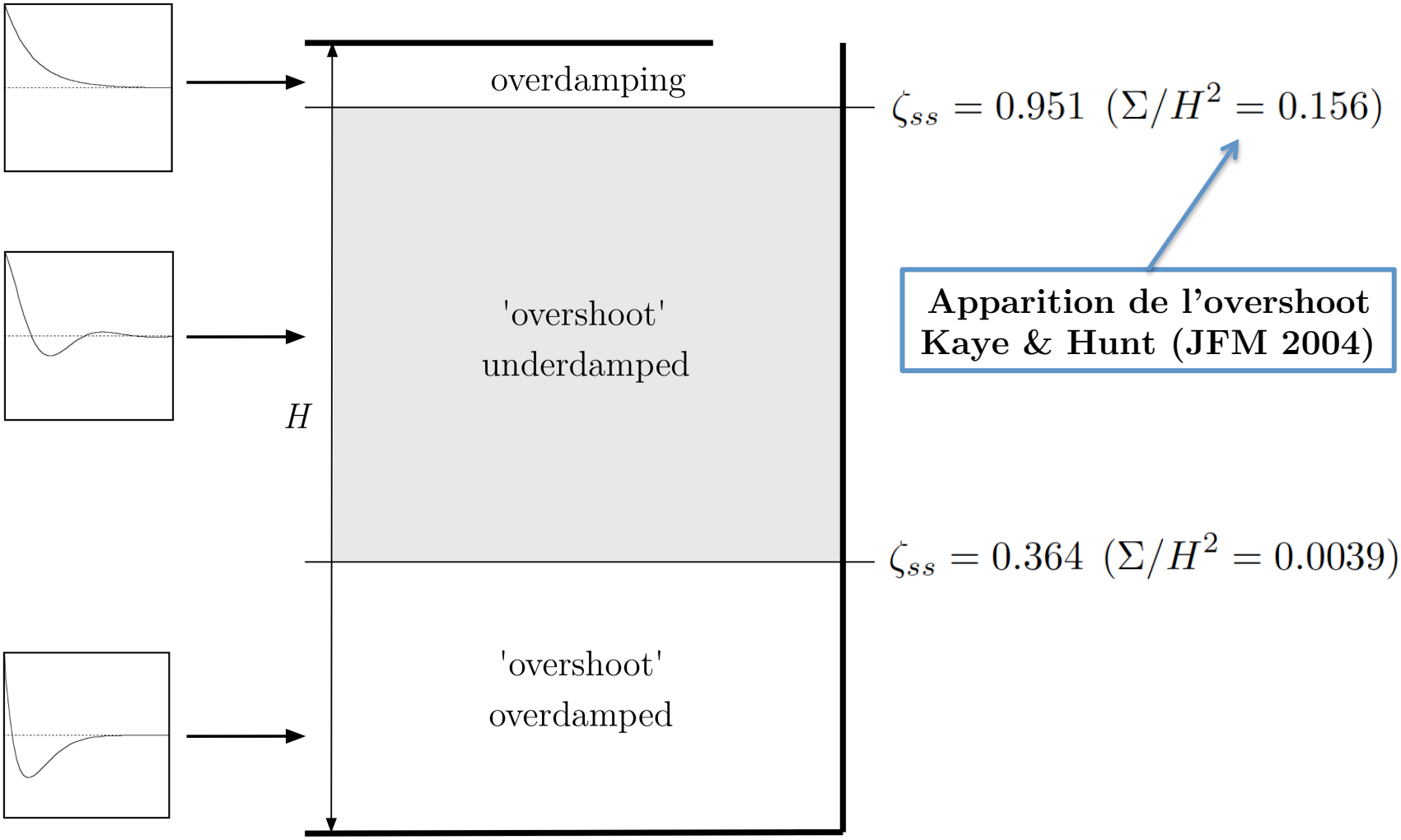
$$A_1^2 < 4\,A_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{289}{4}{\zeta_{ss}}^2 - 95\,\zeta_{ss} + 25 < 0$$

$$0.364 < \zeta_{ss} < 0.951 \quad \Rightarrow \quad 0.0039 < \frac{\Sigma}{H^2} < 0.156$$

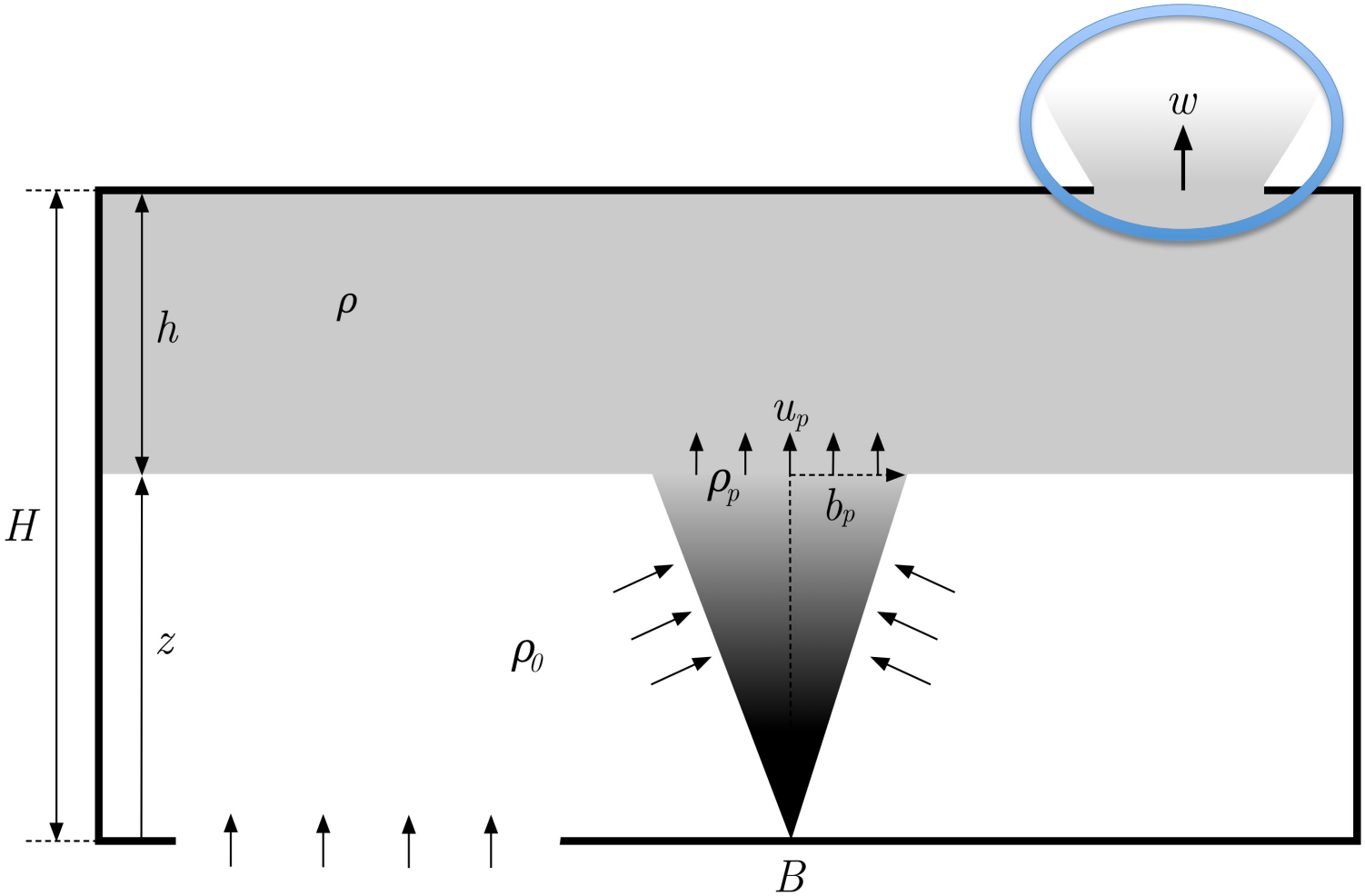
Modélisation analytique non-Boussinesq
Régimes de remplissage-vidange



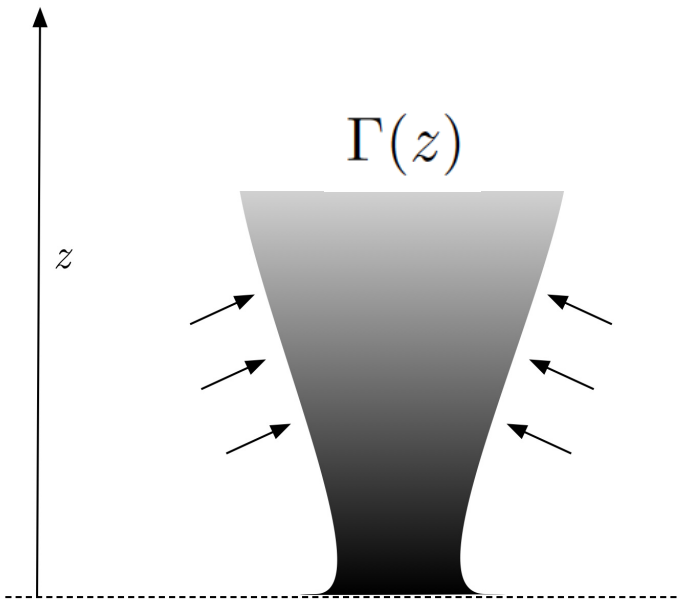
Modélisation analytique non-Boussinesq
Régimes de remplissage-vidange



Modélisation analytique non-Boussinesq
Le panache à l'exutoire



Modélisation analytique non-Boussinesq
Théorie des panaches (non-Boussinesq)



$$u_i, \rho_i, b_i$$

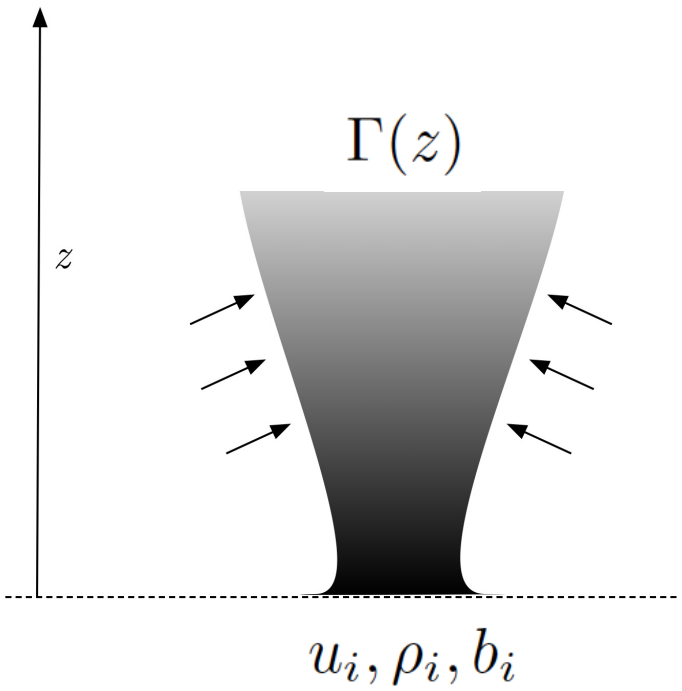
$$\Gamma_i = \frac{5}{8\alpha} \frac{\Delta\rho_i g b_i}{\sqrt{\rho_i \rho_0} u_i^2}$$

$\Gamma_i > 1$: panache paresseux

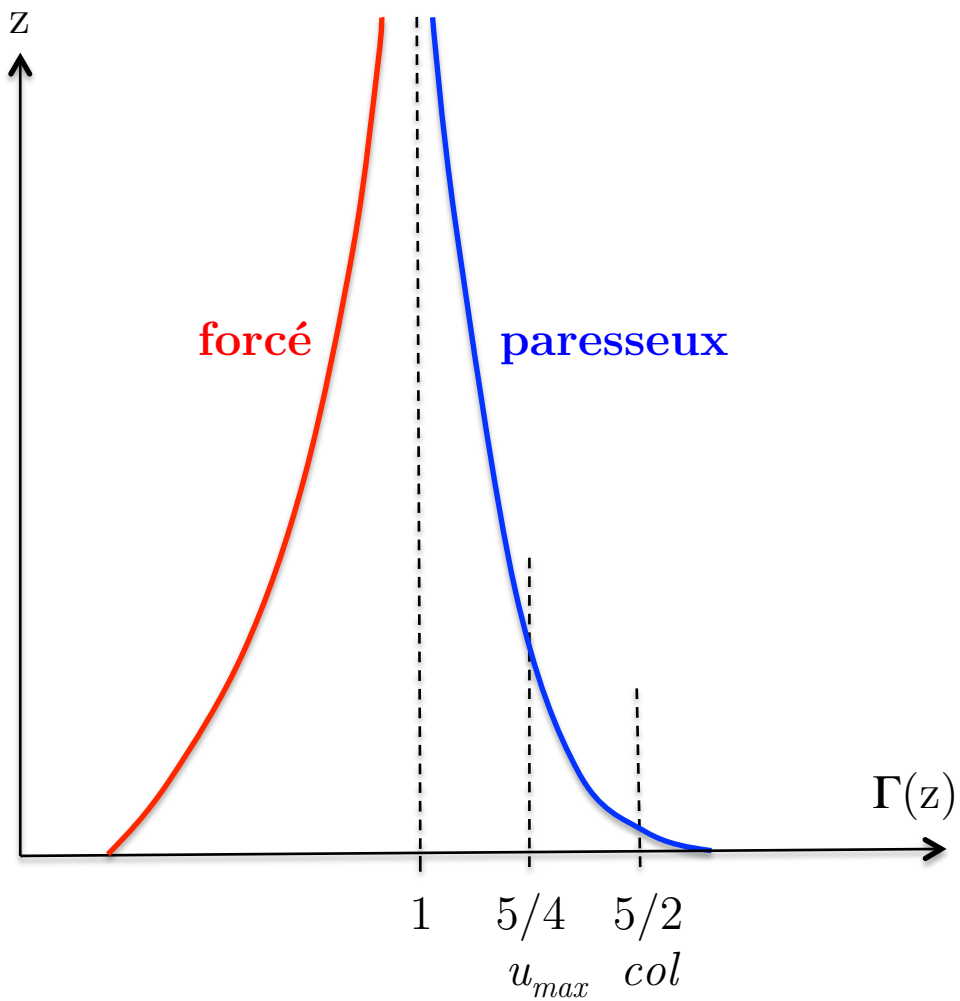
$\Gamma_i = 1$: panache pur

$\Gamma_i > 1$: panache forcé

Modélisation analytique non-Boussinesq
Théorie des panaches (non-Boussinesq)



$$\Gamma_i = \frac{5}{8\alpha} \frac{\Delta\rho_i g b_i}{\sqrt{\rho_i \rho_0} u_i^2}$$



Modélisation analytique non-Boussinesq
La fonction panache à l'exutoire

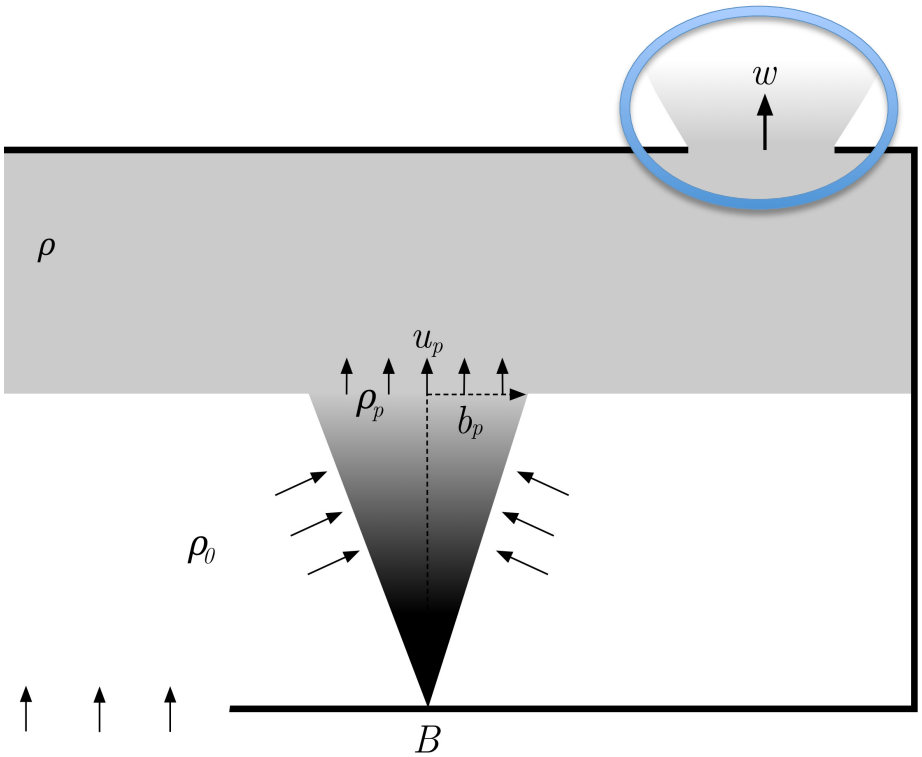
$$\Gamma_{\text{exu}} = \frac{5}{8\alpha} \frac{\Delta\rho_{ss} g \sqrt{\Sigma}}{\sqrt{\rho_{ss}\rho_0}\,\omega_{ss}^2}$$

Solution stationnaire

$$\frac{\zeta_{ss}^{5/3}(\zeta_{ss}^{5/3}+\Theta)^2}{1-\zeta_{ss}} = \frac{\Lambda^2}{\kappa^2}$$

$$\eta_{ss} = \frac{\Theta}{\zeta_{ss}^{5/3}}$$

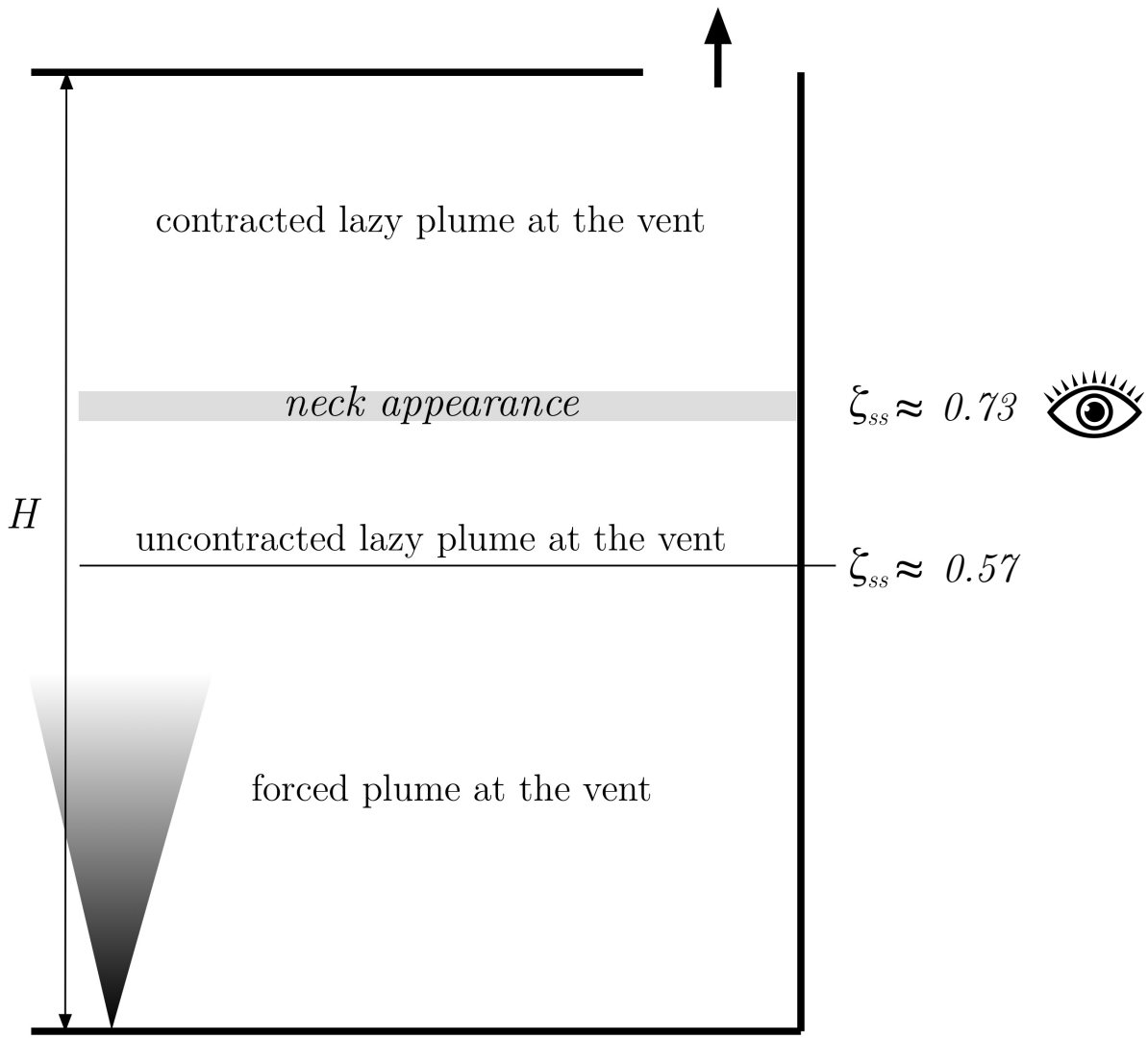
$$\omega_{ss} = \frac{\kappa\Theta^{1/2}}{\Lambda}(\zeta_{ss}^{5/3}+\Theta)$$



$$\Gamma_{\text{exu}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{5/4} \left(\frac{\zeta_{ss}}{1-\zeta_{ss}}\right)^{5/4}$$

$$\Rightarrow \zeta_{ss} = \frac{1}{1+\frac{3}{4\Gamma_{\text{exu}}^{4/5}}}$$

Modélisation analytique non-Boussinesq
La fonction panache à l'exutoire



Quelques résultats théoriques sur la ventilation naturelle (non-Boussinesq)

Olivier Vauquelin