

Modélisation de la congestion dans les mouvements de foules

Bertrand Maury

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris Sud 11

Joint work with S. Faure, A. Roudneff Chupin, F. Santambrogio, J. Venel

Niort, janvier 2014

Paradigme :

Population (collection) d'individus dont le mouvement est régi par

- des projets purement individuels, qui peuvent être les mêmes (personnes interchangeables) ou distincts (ex. : adultes informés qui cherchent à sortir au plus vite d'un bâtiment, enfants qui cherchent à rester près de leurs parents). Cet aspect peut dépendre de facteurs extérieurs (signalétique statique ou dynamique, consignes de personnels de sécurité, ...).
- des tendances sociales : l'individu adapte son comportement en fonction de la perception qu'il a de son environnement immédiat. Il peut s'agir de la position de ses voisins, ou du *comportement* des personnes autour de lui. Ces tendances peuvent être arrangeantes (politesse), non arrangeantes (agressivité), tactiques (contournement de zones saturées, choix d'une issue plus éloignée mais moins saturée), ...
- des interactions directes (contact physique) entre individus : la densité de gens ne peut dépasser une certaine valeur, et les champs d'évacuation usuels ont tendance à *concentrer*, donc augmenter la densité de gens, en amont des sorties. Ces contacts sont évités (tendances sociales à préserver une distance minimale avec ses voisins) en situation normale, mais peuvent advenir en situation critique : lieu exigü saturé (métro, ascenseur), évacuation d'urgence, panique.

MODÈLES “DIRECTS”

Modèles **microscopiques** “physiques” (Helbing). Personnes identifiées à des sphères (ou des disques) pesants. Projet individuel, tendances sociales, et contacts modélisés par des forces.

Possibilité de définir des comportement “personnalisés” (suivi Lagrangien des personnes).

Extension possible à l’ordre 1 en temps.

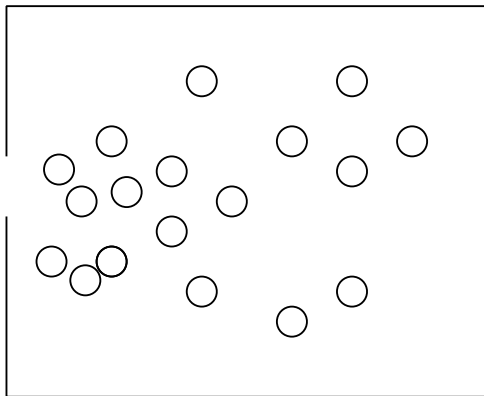
Modèles **macroscopiques**.

Foules représentées globalement par une densité $\rho(x, t)$: nombre de gens au m^2 au voisinage de x , au temps t

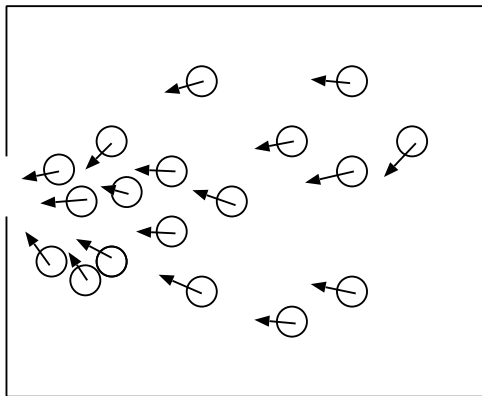
→ Équations du type de celle qu’on rencontre en mécanique des fluide (équations aux dérivées partielles)

Approche *Eulérienne* : quand t varie, $\rho(x, t)$ correspond à des personnes qui changent en permanence → difficulté de suivre les personnes individuellement, et de définir des stratégies différenciées. Pas d’information sur la structure locale (manière dont les gens sont positionnés relativement les uns aux autres).

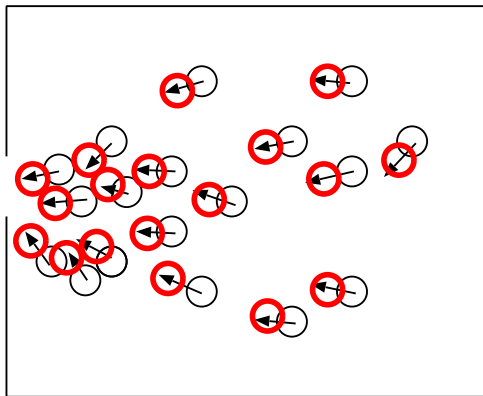
MODÈLES MICRO



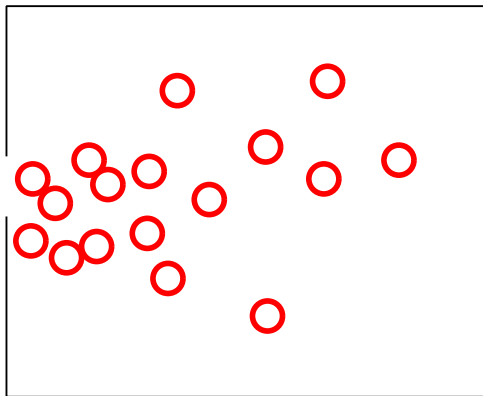
MODÈLES MICRO



MODÈLES MICRO



MODÈLES MICRO



CONGESTION “SOFT”

On considère N individus

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{2N}$$

dans une pièce.

$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N)$ est la collection des vitesses souhaitées.

Situation standard : $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_0(\mathbf{q}_i)$, i.e. la vitesse ne dépend pas des individus, mais seulement de leurs positions (individus interchangeables)

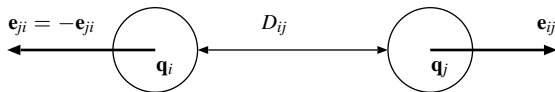
Modèle d'ordre 2 en temps (Helbing 1992'), similaire à un modèle de particules physiques, soumises à des “forces” externes (vitesses souhaitées) et internes (forces sociales d'interaction)

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\tau} (\mathbf{U} - \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{\tau} \Psi(\mathbf{q}),$$

avec $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N)$.

\mathbf{U}_i correspond au projet (vitesse souhaitée), et Ψ prend en compte les interactions.

CONGESTION “SOFT”



$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\tau} (\mathbf{U} - \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{\tau} \Psi(\mathbf{q}),$$

Terme d'interaction

$$\Psi(\mathbf{q})_i = -U \sum_{j \neq i} \varphi(D_{ij}) \mathbf{e}_{ij}, \quad \text{with} \quad D_{ij} = |\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i| - 2r, \quad \mathbf{e}_{ij} = \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i|},$$

où U est le module de la vitesse souhaitée.

Pour modéliser la tendance à préserver une certaine distance avec ses voisins :

$$\varphi(D) > 0.$$

TERME D'INTERACTION (RÉPULSIVE)

$$D \mapsto \varphi(D) > 0.$$

Exemple : tendance sociale (Helbing et al, 2000) : $\exp(-D/D_c)$, où D_c est la distance en dessous de laquelle les individus ressentent un certain inconfort.

Cette distance peut dépendre des circonstances, de la culture :

Travaux fondateurs de Heini Hediger pour des *fauves*

Etendus aux humains par E.T. Hall, *The Hidden Dimension*, 1966).

Pour les américains :

Intime mode proche	$D < 15$ cm	rayonnement chaleur, traits déformés
Intime mode éloigné	$15 < D < 40$	pas admis en public
Personnelle mode proche	$45 < D < 75$	vision des détails
Personnelle mode éloigné	$75 < D < 125$ cm	“à longueur de bras”
Sociale mode proche	$120 < D < 210$ cm	négociations impersonnelles
Sociale mode éloigné	$210 < D < 360$ cm	cadre plus formel
Publique mode proche	$360 < D < 750$ cm	possibilité de fuite
Sociale mode éloigné	$750 < D$	VIP's (“sur invitation”)

MODÈLES D'ORDRE 1 EN TEMPS

Inertie négligée (on fait tendre τ vers 0).

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{U} + \Psi(\mathbf{q}).$$

Comme précédemment, Ψ prend en compte les interactions

$$\Psi(\mathbf{q})_i = -U \sum_{j \neq i} \varphi(D_{ij}) \mathbf{e}_{ij}$$

N.B. : si $\mathbf{U} = -\nabla D$, and $\varphi(d) = -W'(d)$,

→ structure de flot gradient (évolution suivant la ligne de plus grande pente)

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\nabla \Phi(\mathbf{q}),$$

où Φ est une fonction d'insatisfaction globale

$$\Phi(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^N D(\mathbf{q}_i) + \sum_{i < j} W(D_{ij}).$$

Cette fonction encode la compétition entre projet personnel et aspects sociaux.

Réalisées avec <http://www.math.u-psud.fr/~maury/EvacCISM.m>

terme d'interaction :

$$\Psi(\mathbf{q})_i = - \sum_{j \neq i} \varphi(D_{ij}) \mathbf{e}_{ij}$$

avec

$$\exp(-D/D_c) .$$

Obstacles constitués par des individus virtuels immobiles

$N = 80$, pas d'interaction

$N = 80$, congestion

$N = 200$, congestion

$N = 400$, congestion

CONGESTION “HARD”

On considère N individus identifiés à des **disques rigides**

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{2N}$$

dans une pièce.

$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N)$ est la collection des vitesses souhaitées.

Comportement glouton, personnes interchangeables : $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_0(\mathbf{q}_i)$

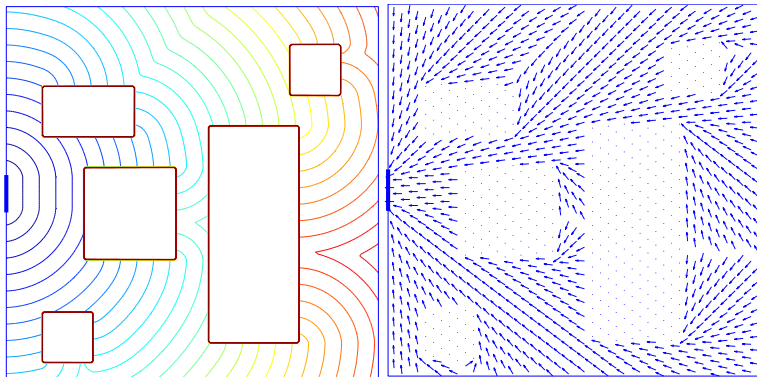
Evolution en situation diluée (sans congestion)

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{q})$$

Exemple : $\mathbf{U}_0 = -\nabla D$ (distance géodésique à la sortie) :

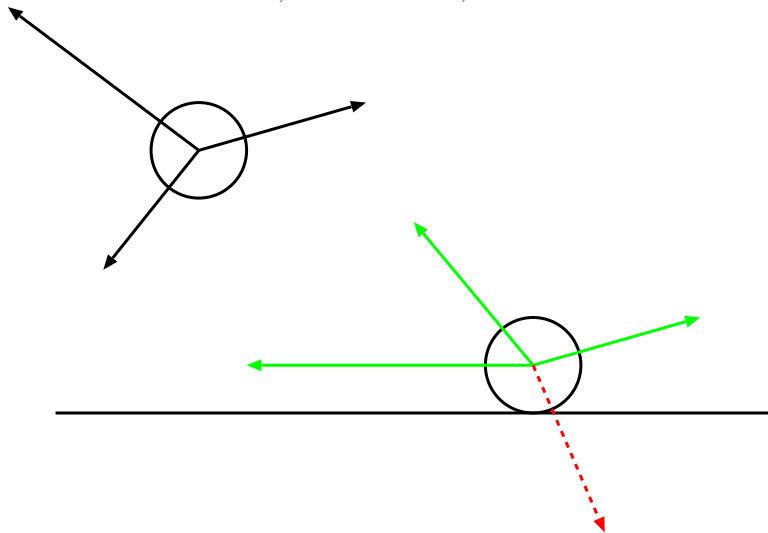
$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\nabla \Phi(\mathbf{q}) \quad \text{with} \quad \Phi(\mathbf{q}) = \sum D(\mathbf{q}_i).$$

Insatisfaction : distance géodésique à la sortie

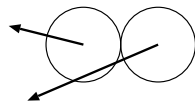
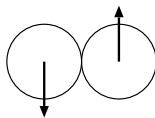
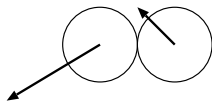
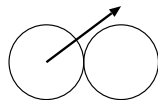
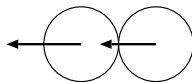


PRISE EN COMPTE DE LA CONGESTION

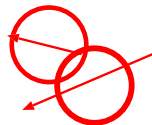
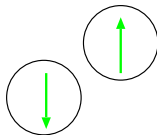
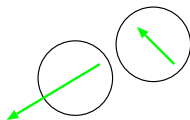
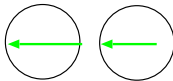
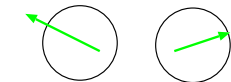
Certaines vitesses sont interdites, du fait des obstacles, ...

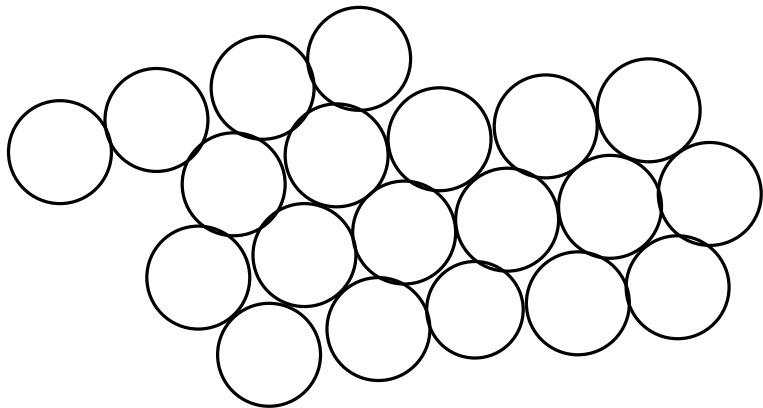


... ou des voisins.



... ou des voisins.





VITESSES ADMISSIBLES

On note C_q l'ensemble (cone) des vitesses admissibles, qui dépend de la position courante des individus.

On suppose (i.e. décide) que la vitesse effective des individus est, parmi les vitesses admissibles, celle qui est la plus proche de la vitesse souhaitée :

$$\mathbf{u} = P_{C_q} \mathbf{U}.$$

Opération *délicate* : il s'agit d'effectuer une projection sur un cône à la géométrie complexe, dans un espace de grande dimension (2 fois le nombre d'individus).

Le problème prend la forme d'un *flot gradient*

$$\mathbf{u} \in -\partial (\Phi(\mathbf{q}) + I_K)$$

avec $\Phi(\mathbf{q})$ somme des insatisfactions (distance à la sortie), et I_K terme de pénalisation qui prend la valeur $+\infty$ quand la contrainte de non chevauchement est violée.

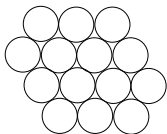
FORMULATION MATHÉMATIQUE

On formule le problème sous forme de *point-selle*, c'est à dire que l'on cherche des forces d'interaction entre individus voisins qui assurent la vérification de la contrainte :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \sum_{i \sim j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}.$$

Le nombre λ_{ij} est la force d'interaction entre i et j . Quantifie l'écrasement pour un individu donné.

Phénomène particulier : configurations dégénérées (hyperstatiques)

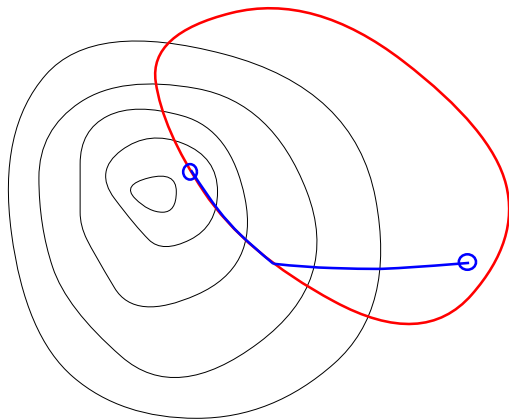


On a plus de contraintes actives (29) que de degrés de liberté ($14 \times 2 = 28$), les forces d'interaction ne sont pas bien définies.

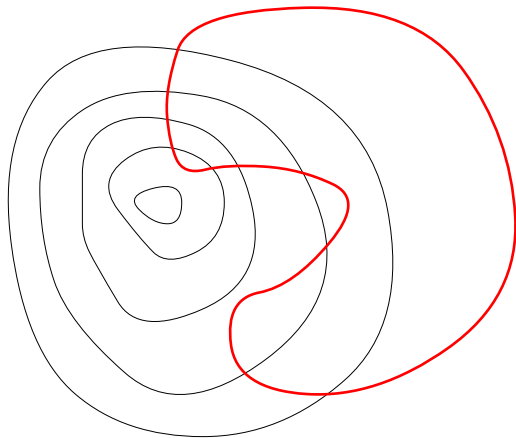
Concrètement, un individu peut ressentir des pressions (fortes) de ses voisins, qui varient très brusquement, sans que la position des gens soit significativement changée.

DISCUSSION SUR L'EFFICACITÉ (EN TERME
D'EVACUATION)

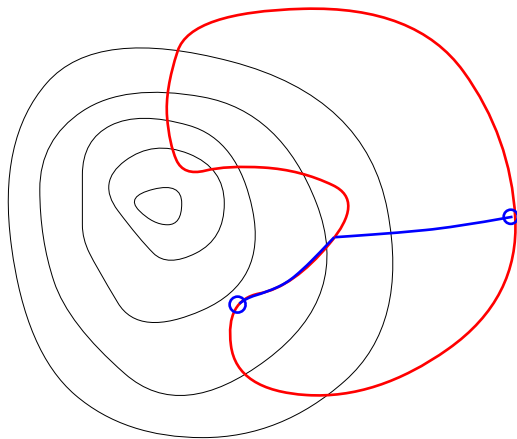
Cas convexe



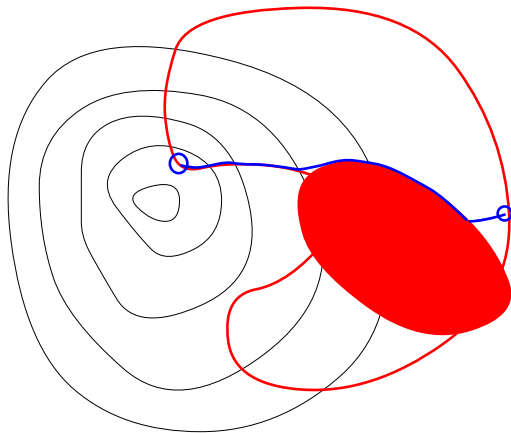
Cas non convexe



Cas non convexe



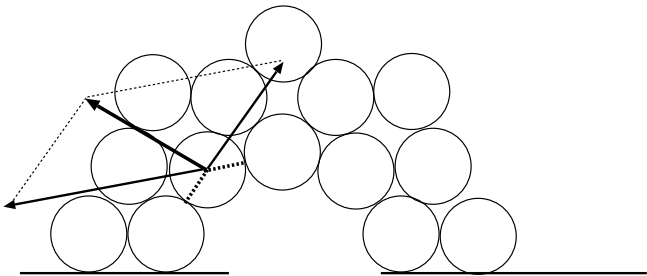
Cas non convexe (avec un obstacle)



BLOCAGE POSSIBLE ?

A priori oui, car l'ensemble des configurations admissibles n'est pas convexe.

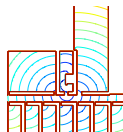
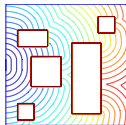
De fait, on peut observer des configurations auto-bloquantes :



ILLUSTRATIONS

Illustrations visionnables sur Youtube :

<http://www.youtube.com/channel/UCnFDMx2EeECxwAyYVS9DNdA>



Convex room

Convex room with one obstacle

8000 individuals

8000 individuals, jam

Réseau de forces

Evacuation “sociale”

Evacuation “reptilienne”

Strategy I : politeness

Strategy II : smart guy

Strategy III : smarts guys

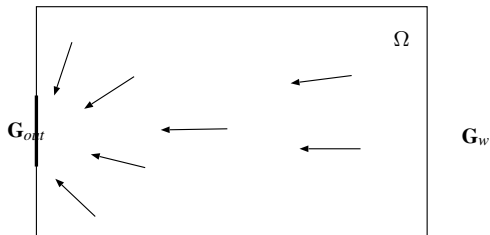
Strategy IV : many smart guys

Lanes I

Lanes II

Métro micro

APPROCHE MACROSCOPIQUE



Fonction de densité $\rho(x, t)$ locale (en nombre de personnes par m^2), assujettie à rester en dessous d'une valeur de saturation $= \rho \leq 1$ (en fait autour de 6 en réalité)

Vitesse souhaitée : $\mathbf{U}(x, t)$

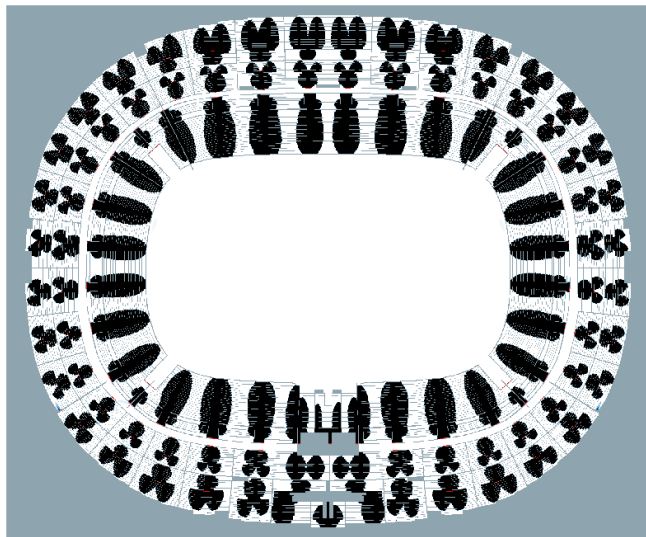
Champ de vitesse réel : \mathbf{u} .

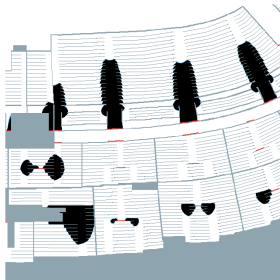
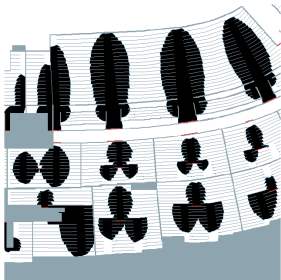
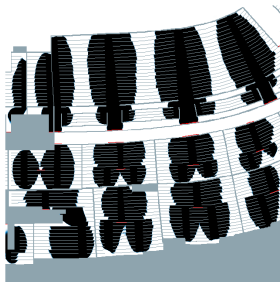
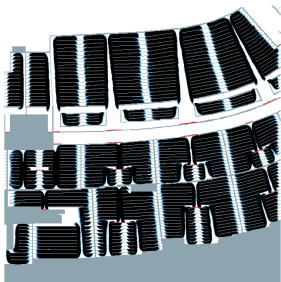
$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\text{avec } \mathbf{u} = P_{\mathcal{C}_\rho} \mathbf{U}$$

\mathcal{C}_ρ : vitesses admissibles (qui n'augmente pas ρ là où la contrainte est déjà saturée).

MACROSCOPIC MODEL COMPUTATIONS



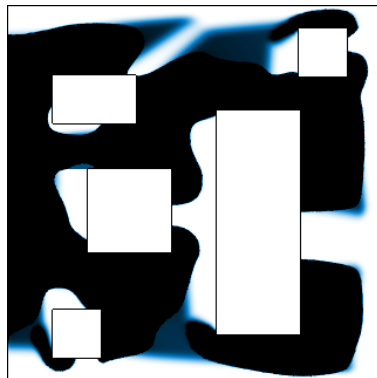
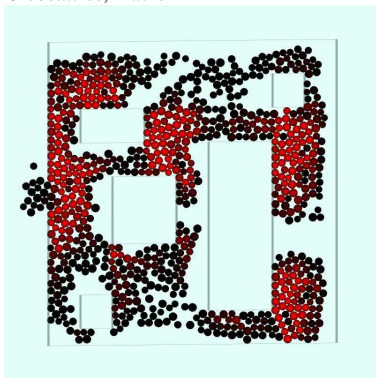


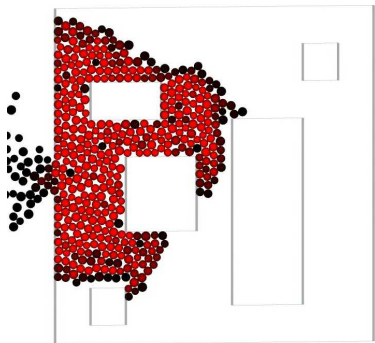
Stade de France

MICRO VS MACRO

5 obstacles, micro

5 obstacles, macro





ADDITIONAL EXAMPLES

Métro micro

Métro macro

Mogador

Suivi individu