

MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA FONCTION DENSITÉ DE PROBABILITÉ POUR LA MODÉLISATION DES FLAMMES CARACTÉRISTIQUES DES INCENDIES

Daria BUROT

Directeur de thèse : Jean-Louis CONSALVI* (IUSTI)

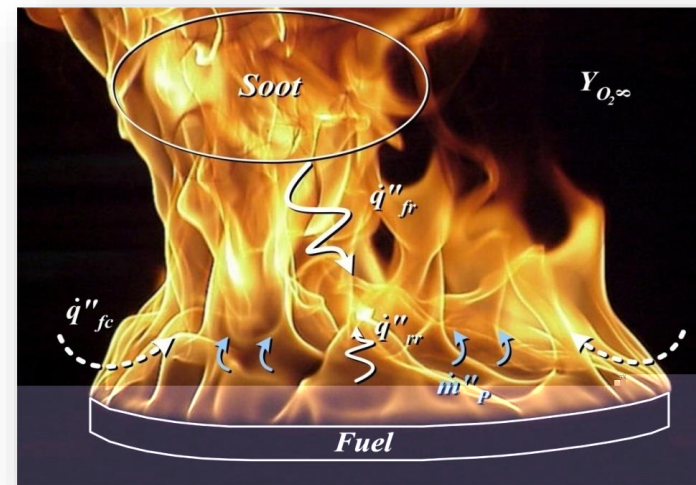
Encadrant industriel : Fatiha NMIRA** (EDF)

* Aix-Marseille Université, IUSTI/UMR CNRS 7343, 5 rue E. Fermi, 13453 Marseille Cedex 13, France.

** EDF R&D, 6 quai Watier, 78400 Chatou, France.

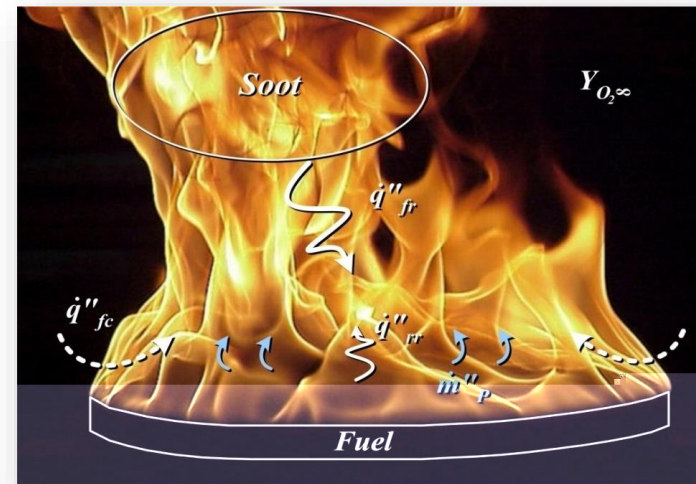
CONTEXTE

- **Contexte EDF : Sécurité incendie dans les centrales nucléaires. Etudes numériques pour déterminer l'impact sur l'environnement de la flamme dû à la fumée (suies) et au rayonnement.**
- **Modélisation de l'ensemble des phénomènes suivants:**
 - Les transferts radiatifs vers le combustible condensé (liquide ou solide), ce qui assure la production de combustible gazeux.
 - Les transferts radiatifs vers le milieu environnant.
 - La production de suie car ces particules jouent un rôle important dans les transferts radiatifs et sont susceptibles d'endommager des composants électroniques.
 - Les phénomènes d'extinction locale de la flamme dus au confinement.
 - Le tout au sein d'un écoulement turbulent.



CONTEXTE

- **Développer des méthodes numériques fiables qui permettront de prendre en compte tous ces phénomènes couplés**
 - Modèles existants pour la combustion de la phase gazeuse, la production de la suie et les transferts radiatifs mais couplages négligés.
 - Ici: mise en place d'une base de méthodes permettant de prendre en compte ces couplages.



SOMMAIRE

CONTEXTE

1. MODÉLISATION INCENDIE

- 1.1 MODÉLISATION CLASSIQUE
- 1.2 LIMITES ET SOLUTION PROPOSÉE

2. MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA PDF

- 2.1 CADRE D'IMPLÉMENTATION
- 2.2 EQUATION DE TRANSPORT DE LA PDF
- 2.3 RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT
- 2.4 VALIDATION DU MODÈLE

3. INTERACTIONS RAYONNEMENT/TURBULENCE

- 3.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME
- 3.2 OBJECTIFS DE L'ÉTUDE
- 3.3 EFFET TOTAL DE LA TRI SUR L'ÉMISSION RADIATIVE DES SUIES

4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

SOMMAIRE

CONTEXTE

1. MODÉLISATION INCENDIE

1.1 MODÉLISATION CLASSIQUE

1.2 LIMITES ET SOLUTION PROPOSÉE

2. MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA PDF

2.1 CADRE D'IMPLÉMENTATION

2.2 EQUATION DE TRANSPORT DE LA PDF

2.3 RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT

2.4 VALIDATION DU MODÈLE

3. INTERACTIONS RAYONNEMENT/TURBULENCE

3.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

3.2 OBJECTIFS DE L'ÉTUDE

3.3 EFFET TOTAL DE LA TRI SUR L'ÉMISSION RADIATIVE DES SUIES

4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

1. MODÉLISATION INCENDIE

1.1 MODÉLISATION CLASSIQUE

■ Modélisation de la combustion turbulente

- Combustion : schémas cinétiques détaillés pour inclure assez d'espèces intermédiaires pour modéliser correctement la chimie et la production de suie.
- Modèle de flammelettes [Peters, 1984]
 - Chimie rapide par rapport à l'écoulement
 - Structure de flamme : équations de flammelettes 1D laminaire. Permettent de calculer les propriétés thermodynamiques de l'écoulement en fonction d'un nombre réduit de paramètres:
 - Fraction de mélange ζ
 - Taux de dissipation scalaire χ
 - Paramètres de pertes radiatives X_R
 - Termes relatifs aux suies N_S, Y_S
 - Stockage des grandeurs dans une librairie de flammelettes
- Obtention des valeurs moyennes des propriétés de la phase gazeuse par approche statistique [Brookes and Moss, 1999].

$$\tilde{\phi} = \int \phi(\zeta, \chi, X_R, N_S, Y_S) f(\zeta, \chi, X_R, N_S, Y_S) d\zeta d\chi dX_R dN_S dY_S$$

PDF de composition

- Chimie détaillée à moindre coût mais ne prend pas en compte extinction/ré-inflammation

1. MODÉLISATION INCENDIE

1.1 MODÉLISATION CLASSIQUE

[Brooke and Moss, 1999]

▪ Détermination de $f(\zeta, \chi, X_R, Y_S, N_S)$: PDF présumée

- Indépendance statistique entre toutes les variables de la PDF

$$f(\zeta, \chi, X_R, Y_S, N_S) = f(\zeta)f(\chi)f(X_R)f(Y_S)f(N_S)$$

- Chaque PDF a une forme présumée :

- Fraction de mélange : β -PDF

$$f(\zeta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \zeta^{a-1} (1-\zeta)^{b-1}$$

avec a et b fonctions de $\tilde{\zeta}$ et $\tilde{\zeta}''^2$ (à obtenir via résolution équation de transport)

- Autre variables : Dirac autour de la valeur moyenne $f(A) = \delta(A - \tilde{A})$

- Calcul simplifié pour les grandeurs moyennes nécessaires

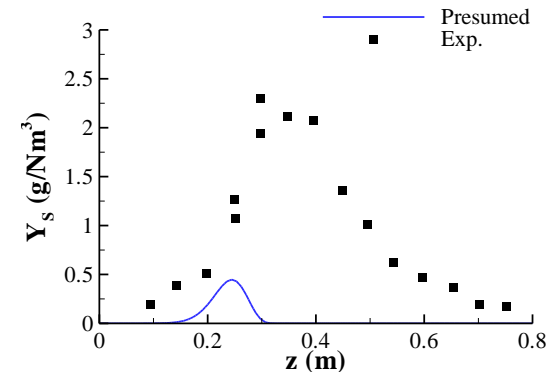
$$\tilde{\phi} = \int_0^1 \phi(\zeta, \tilde{\chi}, \tilde{X}_R, \tilde{Y}_S, \tilde{N}_S) f(\zeta) d\zeta$$

1. MODÉLISATION INCENDIE

1.2 LIMITES ET SOLUTION PROPOSÉE

▪ Limitations de cette méthode

- Non prise en compte des phénomènes d'extinction/ré-inflammation
- Les couplages entre scalaires ne sont pas pris en compte (indépendance statistique):
 - Concentrations en suies sous-estimées [Brooke and Moss, 1999; Consalvi et al., 2011]
 - Modélisation imprécise de l'émission radiative:
 - Les suies participent fortement au rayonnement
 - Le couplage entre les propriétés radiatives des suies et la température est négligé



Flamme de propane [Nishida and Mukohara, 1982]

▪ Méthode proposée: résolution d'une équation de transport pour la PDF

- Permet de prendre en compte une chimie finie
- Applicable en RANS ou en LES
- Modélise les couplages de façon exacte

SOMMAIRE

CONTEXTE

1. MODÉLISATION INCENDIE

1.1 MODÉLISATION CLASSIQUE

1.2 LIMITES ET SOLUTION PROPOSÉE

2. MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA PDF

2.1 CADRE D'IMPLÉMENTATION

2.2 EQUATION DE TRANSPORT DE LA PDF

2.3 RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT

2.4 VALIDATION DU MODÈLE

3. INTERACTIONS RAYONNEMENT/TURBULENCE

3.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

3.2 OBJECTIFS DE L'ÉTUDE

3.3 EFFET TOTAL DE LA TRI SUR L'ÉMISSION RADIATIVE DES SUIES

4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

2. MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA PDF

2.1 CADRE D'IMPLEMENTATION

- **On se place dans le régime de flammelette:** $f(\underline{\psi}) \equiv f(\zeta, \chi, X_R, Y_S, N_S)$
 - $f(\underline{\psi}) = f(\zeta, X_R, Y_S, N_S) \delta(\chi - \tilde{\chi})$ [Heyl and Bockhorn, 2001]

- **RANS: k-ε standard**

- **Modèle de suies et implémentation dans le cadre flamelet**
 - Modèle de Lindstedt [Lindstedt, 1994]
 - Basé sur la fraction massique d'acétylène C_2H_2 + benzène C_6H_6
 - Transport de Y_s et de N_s
 - Modélisation de : nucléation, croissance en surface, oxydation par O_2 et OH , coagulation.
 - Validé sur une 30aine de flammes laminaires [Demarco *et al.*, 2012]
 - Temps caractéristiques des réactions liées à la production de la suie trop longs pour relier Y_s et N_s à ζ directement :
 - Calcul des termes sources S_{Y_s} et S_{N_s} stockés dans la librairie de flammelettes
 - Calcul des valeurs moyennes des termes sources à partir de la librairie et de la PDF

2. MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA PDF

2.1 CADRE D'IMPLÉMENTATION

[Modest, 2010]

■ Transferts radiatifs à modéliser pour résoudre l'équation d'enthalpie:

□ Pertes radiatives: $-\langle \dot{Q}_R \rangle = \nabla \cdot \left(\int_{\eta} \left(\int_{4\pi} \langle I_{\eta} \rangle \vec{s} d\Omega \right) d\eta \right)$

Luminance monochromatique moyenne

- Obtenue par résolution de l'Equation de Transfert Radiatif moyennée, résolue par Volumes Finis [Chui & al., 1992]

$$\frac{d\langle I_{\eta} \rangle}{ds} + \langle \kappa_{\eta} I_{\eta} \rangle = \langle \kappa_{\eta} I_{b\eta} \rangle$$

■ Interactions Rayonnement-Turbulence:

□ Absorption: OTFA: $\langle \kappa_{\eta} I_{\eta} \rangle = \langle \kappa_{\eta} \rangle \langle I_{\eta} \rangle + \langle \kappa_{\eta}' I_{\eta}' \rangle \approx \langle \kappa_{\eta} \rangle \langle I_{\eta} \rangle$

□ Emission: calcul exact via l'approche PDF $\langle \kappa_{\eta} I_{b\eta} \rangle = \int \kappa_{\eta}(\underline{\phi}) I_{b\eta}(\underline{\phi}) f(\underline{\phi}) d\underline{\phi}$

■ Propriétés radiatives du milieu à modéliser $\kappa_{\eta} = \kappa_{\eta,gaz} + \kappa_{\eta,suies}$

- Gaz (CO₂, H₂O): Modèle WBCK

- Suies: Rayleigh (pas de diffusion du rayonnement dû aux particules) et coefficient d'absorption de Chang et Charalampopoulos [1990]: $\kappa_{\eta,suies} = C_{\eta} \eta f_{v,s}$

2. MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA PDF

2.2 EQUATION DE TRANSPORT DE LA PDF

- **Etablie à partir des équations de Navier-Stokes et des propriétés de $f(\underline{\psi})$**

$$\underbrace{\frac{\partial \langle \rho \rangle f}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle \tilde{u}_i f}{\partial x_i}}_{\text{Convection par l'écoulement}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Gamma_T \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]}_{\text{Diffusion turbulente}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} \left[\langle \rho \rangle f \frac{1}{2} C_\phi \frac{\varepsilon}{k} (\bar{\phi}_\alpha - \psi_\alpha) \right]}_{\text{Micro-mixing (modèle IEM)}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} \left[\langle \rho \rangle f \frac{S_\alpha(\underline{\psi})}{\rho(\underline{\psi})} \right]}_{\text{Terme source pour le scalaire } \alpha}$$

Convection par l'écoulement

Diffusion turbulente

Micro-mixing (modèle IEM)

Terme source pour le scalaire α

Transport dans l'espace physique

Transport dans l'espace de composition

- **Termes sources pour les scalaires:**

- ζ : scalaire passif, pas de terme source
- X_R : modèle de rayonnement
- Y_S, N_S : modèle de production des suies

- **Intérêt : Modéliser de manière exacte les interactions turbulence/production de suie et turbulence/émission du rayonnement.**

2. MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA PDF

2.3 RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT

- La PDF est une fonction à nombreuses variables : les méthodes de discrétisation classiques ne sont pas applicables
- 2 types de méthodes:
 - Méthodes déterministes: basées sur des équations de transport déterministes (ex. Direct Quadrature Method Of Moments (DQMOM))
 - Méthodes stochastiques (ex: méthodes de Monte-Carlo, Stochastic Fields (SF))
 - Méthodes à Particules (Monte Carlo): particules Lagrangiennes ou Eulériennes
 - Méthode intermédiaire: Stochastic Fields (SF) contenant une partie déterministe et une partie stochastique
- Méthode retenue: Stochastic Eulerian Fields (SEF) [Valiño, 1998; Garmory, 2007; Jaishree, 2012]

$$f(\underline{\psi}; \underline{x}, t) = \frac{1}{N_f} \sum_{n=1}^{N_f} \prod_{\alpha=1}^{N_\alpha} \delta(\psi_\alpha - \phi_{\alpha,n}(\underline{x}, t))$$

2 fois continument dérivables

avec $20 < N_f < 80$ (ici $N_f = 60$)

- Avantages: implémentation quasiment directe dans les codes FV classiques

2. MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA PDF

2.3 RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT

- Environnements obtenus via SPDE déterminées au sens d'Ito à partir de l'équation de transport de la PDF

$$d\phi_{\alpha,n} = -\tilde{u}_i \frac{\partial \phi_{\alpha,n}}{\partial x_i} dt + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Gamma \frac{\partial \phi_{\alpha,n}}{\partial x_i} \right] + S_\alpha(\phi_{\alpha,n}) dt + \frac{1}{2} C_\phi \frac{\varepsilon}{k} (\phi_{\alpha,n} - \bar{\phi}_\alpha) dt + \left(\frac{2}{\langle \rho \rangle} \Gamma \right)^{1/2} \frac{\partial \phi_{\alpha,n}}{\partial x_i} dW_{i,n}$$

- Résolue en deux étapes :

- 1^{ère} étape déterministe $d\phi_{\alpha,n} = -\tilde{u}_i \frac{\partial \phi_{\alpha,n}}{\partial x_i} dt + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Gamma \frac{\partial \phi_{\alpha,n}}{\partial x_i} \right] + S_\alpha(\phi_{\alpha,n}) dt \rightarrow$ résolution FV
- 2^{ème} étape stochastique $d\phi_{\alpha,n} = \frac{1}{2} C_\phi \frac{\varepsilon}{k} (\phi_{\alpha,n} - \bar{\phi}_\alpha) dt + \left(\frac{2}{\langle \rho \rangle} \Gamma \right)^{1/2} \frac{\partial \phi_{\alpha,n}}{\partial x_i} dW_{i,n}$

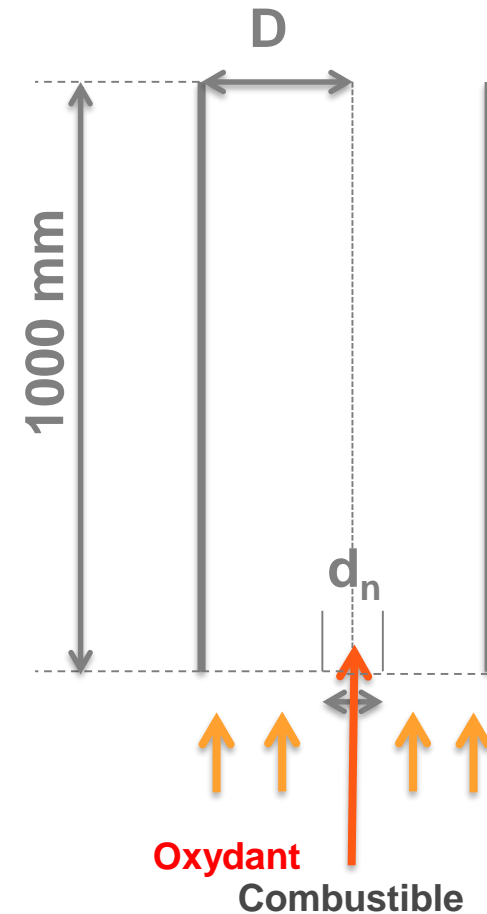
- Obtention de n'importe quel moment d'ordre r de $Q(\underline{\phi})$:

$$M_r(Q)(\underline{x}, t) = \frac{1}{N_f} \sum_{n=1}^{N_f} [Q(\phi_{\alpha,n}(\underline{x}, t))]^r$$

2. MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA PDF

2.4 VALIDATION DU MODÈLE

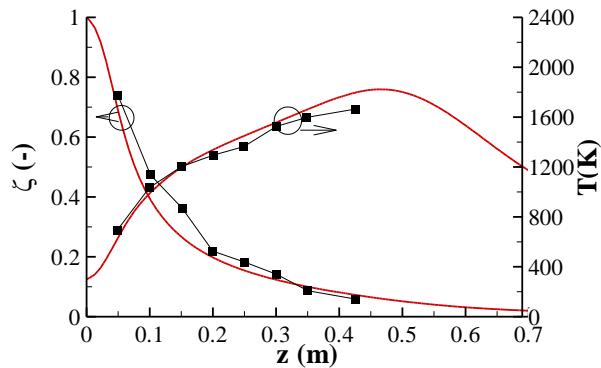
- **12 flammes de diffusion turbulentes de type jet**
 - Large gamme de Reynolds (5000-15000)
 - Différents combustibles (CH_4 , C_2H_4 , $\text{C}_2\text{H}_4/\text{H}_2/\text{N}_2$, C_3H_8 , $\text{C}_2\text{H}_4/\text{CH}_4$)
 - Différentes propensions à produire de la suie
- **Application du modèle avec un jeu de paramètres identique pour toutes les flammes**
- **Résultats sur quelques unes de ces flammes, comparés aux données expérimentales et aux résultats obtenus avec la méthode de PDF présumée**



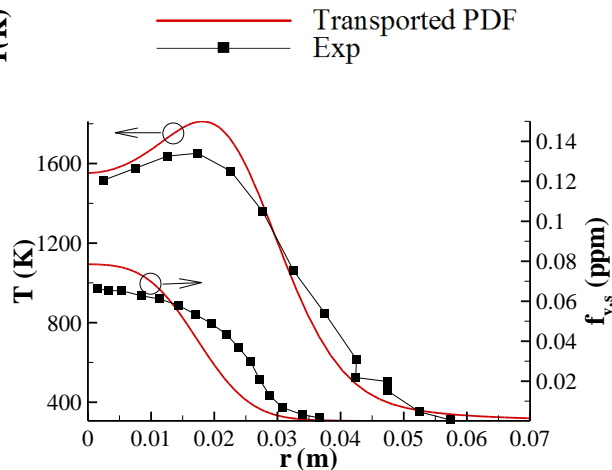
2. MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA PDF

2.4 VALIDATION DU MODÈLE

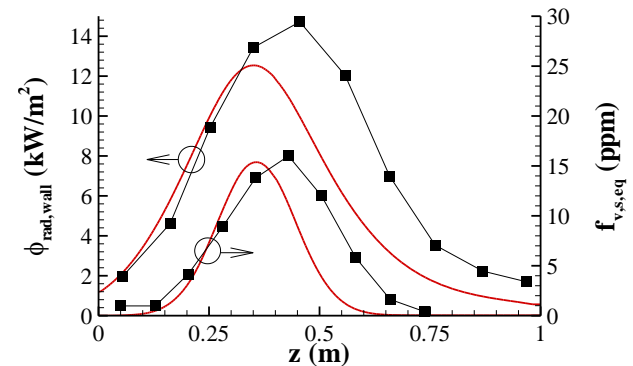
■ Comparaison à l'expérimental



Méthane-Air
Re=5000



Méthane-Air
Re=5000



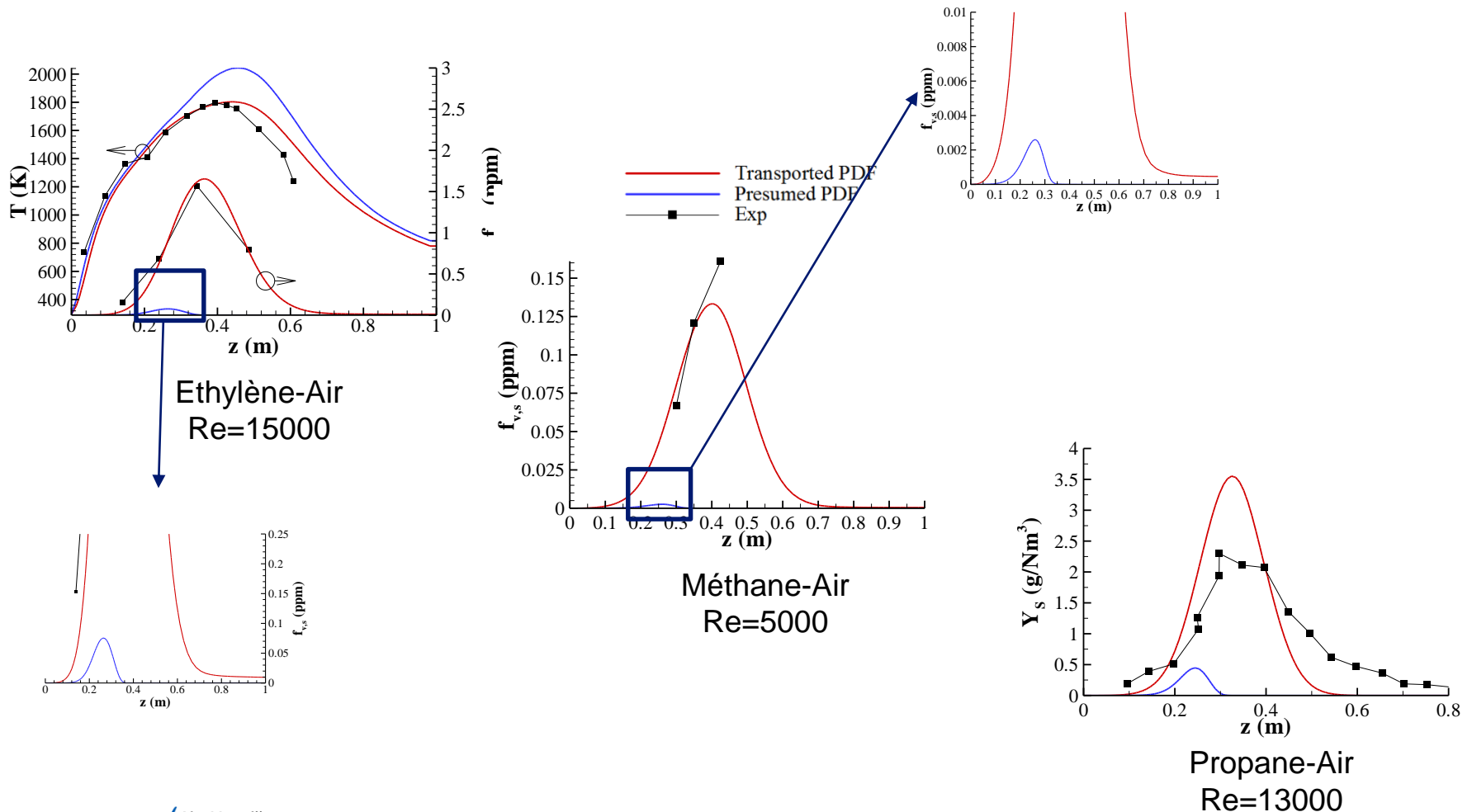
Propane-40%O₂
Re=15000

■ Ecart global maximum obtenu sur fraction volumique de suie et les flux radiatifs: ~20%

2. MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA PDF

2.4 VALIDATION DU MODÈLE

■ Comparaison à la méthode de PDF présumée



SOMMAIRE

CONTEXTE

- 1. MODÉLISATION INCENDIE**
 - 1.1 MODÉLISATION CLASSIQUE
 - 1.2 LIMITES ET SOLUTION PROPOSÉE

- 2. MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA PDF**
 - 2.1 CADRE D'IMPLÉMENTATION
 - 2.2 EQUATION DE TRANSPORT DE LA PDF
 - 2.3 RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT
 - 2.4 VALIDATION DU MODÈLE

- 3. INTERACTIONS RAYONNEMENT/TURBULENCE**
 - 3.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME
 - 3.2 OBJECTIFS DE L'ÉTUDE
 - 3.3 EFFET TOTAL DE LA TRI SUR L'ÉMISSION RADIATIVE DES SUIES

- 4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES**

3. INTERACTIONS RAYONNEMENT/TURBULENCE

3.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

- ETR moyenne avec OTFA:

$$\frac{d\langle I_\eta \rangle}{ds} + \langle \kappa_\eta \rangle \langle I_\eta \rangle = \langle \kappa_\eta I_{b\eta} \rangle$$

- **Méthode PDF transportée: terme TRI d'émission $\langle \kappa_\eta I_{b\eta} \rangle$ calculé de manière exacte**
 - Avec d'autres méthodes (par ex. PDF présumée) terme calculé de manière simplifiée:
 - Ici on peut évaluer les écarts entre les modèles simplifiés et le terme exact

- $\langle \kappa_\eta I_{b\eta} \rangle = \langle \kappa_{\eta, suies} I_{b\eta} \rangle + \langle \kappa_{\eta, gaz} I_{b\eta} \rangle$

- TRI due à l'émission des gaz: déjà étudiée en détails [Coelho 2007].:

$$\langle \kappa_{\eta, gaz} I_{b\eta} \rangle \approx \langle \kappa_{\eta, gaz} \rangle I_{\eta b}(\langle T \rangle) + \underbrace{\langle \kappa_{\eta, gaz} \rangle}_{>0} \left(\frac{\langle T'^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 I_{b\eta}}{\partial T^2} \right)_{\langle T \rangle} + \underbrace{\langle \kappa_{\eta, gaz} T' \rangle}_{>0} \left(\frac{\partial I_{b\eta}}{\partial T} \right)_{\langle T \rangle}$$

La corrélation est positive; la TRI a pour effet d'accroître l'émission radiative des gaz

- On s'intéresse ici uniquement à l'émission radiative des suies et à l'impact de la TRI sur cette émission : $\langle \kappa_{\eta, suies} I_{b\eta} \rangle$

3. INTERACTIONS RAYONNEMENT/TURBULENCE

3.2 OBJECTIFS DE L'ÉTUDE

- Influence du nombre de Reynolds. La flamme C₂H₄-12000 fait partie de la base de validation.

Name	Fuel	Re	L _{SD} (m)
C ₂ H ₄ -8000	C ₂ H ₄	8000	0.102
C ₂ H ₄ -12000	--	12000	--
C ₂ H ₄ -20000	--	20000	--

LTS
(flamme de base)

Impact de l'intensité turbulente:
augmentation de Re

- Objectifs: Comprendre l'impact de l'intensité turbulente sur l'émission radiative des suies

3. INTERACTIONS RAYONNEMENT/TURBULENCE

3.3 EFFET TOTAL DE LA TRI SUR L'ÉMISSION RADIATIVE DES SUIES

- Terme d'émission moyen intégré sur le spectre:

$$\langle E_s \rangle = 4\pi \int_0^\infty \langle \kappa_{s,\eta}(f_{v,s}) I_{b\eta}(T) \rangle d\eta = 4\pi \langle \kappa_{s,P}(f_{v,s}, T) I_b(T) \rangle$$

avec

$$\kappa_{s,P}(f_{v,s}, T) = \frac{\int \kappa_{s,\eta}(f_{v,s}) I_{b\eta}(T) d\eta}{I_b(T)} \quad \text{et} \quad I_b(T) = \int I_{b\eta}(T) d\eta = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

- Si on néglige la TRI: $\langle E_s \rangle_{no\ TRI} = 4\pi \kappa_{s,P}(\langle f_{v,s} \rangle, \langle T \rangle) I_b(\langle T \rangle)$

Name	$\langle E_s \rangle_{noTRI,t}$ (W)	$\langle E_s \rangle_t$ (W)
C ₂ H ₄ -8000	1125	1372 (22.0%)
C ₂ H ₄ -12000	1630	1802 (10.6%)
C ₂ H ₄ -20000	1963	2140 (9.01%)

- La TRI accroît l'émission radiative totale. Cette augmentation est d'autant moins forte que le nombre de Reynolds est élevé.

SOMMAIRE

CONTEXTE

1. MODÉLISATION INCENDIE

- 1.1 MODÉLISATION CLASSIQUE
- 1.2 LIMITES ET SOLUTION PROPOSÉE

2. MÉTHODE DE TRANSPORT DE LA PDF

- 2.1 CADRE D'IMPLÉMENTATION
- 2.2 EQUATION DE TRANSPORT DE LA PDF
- 2.3 RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT
- 2.4 VALIDATION DU MODÈLE

3. INTERACTIONS RAYONNEMENT/TURBULENCE

- 3.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME
- 3.2 OBJECTIFS DE L'ÉTUDE
- 3.3 EFFET TOTAL DE LA TRI SUR L'ÉMISSION RADIATIVE DES SUIES

4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

■ Conclusions

- Mise en place d'une méthode de résolution de l'équation de transport de la PDF couplée à un modèle de flammelettes, pour modéliser la combustion, la production de suie et les transferts radiatifs dans des flammes de diffusion turbulentes.
- Validation de la méthode sur une large gamme de flammes de diffusion turbulentes de type jet.
- Mise en évidence de l'amélioration par rapport aux méthodes classiques
- Etude des interactions rayonnement/turbulence et leur impact sur l'émission radiative des suies. Mise en évidence de l'importance de l'intensité turbulente.
- Etude des interactions rayonnement/chimie

■ Perspectives

- Application de la méthode à des flammes pilotées par la flottabilité (plus typique des incendies)
- Chimie finie

Merci de votre attention



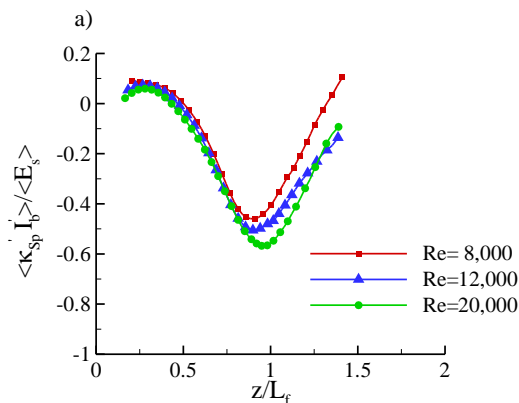
ANNEXE: EFFET DE CHAQUE CONTRIBUTION À LA TRI

■ Calcul de chaque contribution intégrée sur le volume

Name	$\langle E_S \rangle_{noTRIS,t} / \langle E_S \rangle_t$	$F_{1,t} / \langle E_S \rangle_t$	$F_{2,t} / \langle E_S \rangle_t$	$F_{3,t} / \langle E_S \rangle_t$
C₂H₄-8000	82.0%	-5.5%	37.3%	-13.8%
C₂H₄-12000	90.5%	-7.8%	35.1%	-17.8%
C₂H₄-20000	91.7%	-10.4%	39.1%	-20.4%

- F_2 : contribution positive, source de l'augmentation de l'émission due à la TRI. Globalement indépendante de l'intensité turbulente
- F_1 et F_3 : contributions négatives et d'autant plus fortes que le Re augmente.

■ Analyse locale du terme $F_3 = 4\pi \langle \kappa_{S,P} I_b' \rangle$ (même type de résultats pour $4\pi C \langle f_{v,s} T' \rangle$)



Rapporté à l'intensité turbulente définie par:

$$I_T = \frac{\sqrt{\langle \kappa_{S,P} '2 \rangle} \sqrt{\langle I_b '2 \rangle}}{\langle \kappa_{S,P} \rangle \langle I_b \rangle}$$

