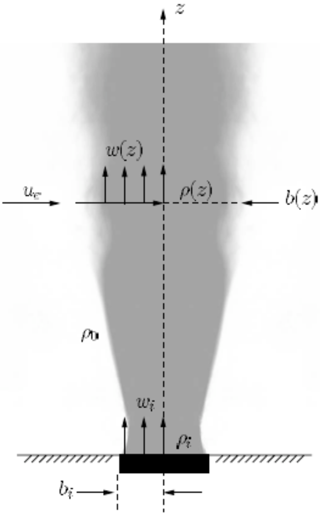
Solutions asymptotiques pour les panaches turbulents

F. Candelier & O. Vauquelin

IUSTI (UMR 7343) - Aix-Marseille Université

fabien.candelier@univ-amu.fr

28 Juin 2012

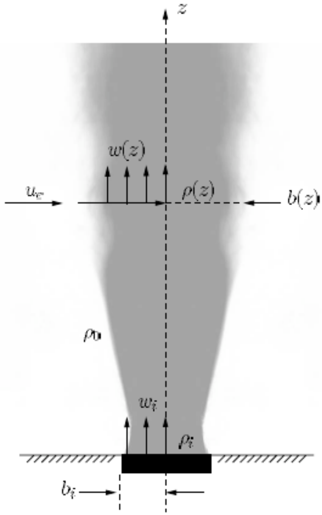


- Panaches $\leftrightarrow$ source d'émission des fumées
- Equations de base (Morton *et al.* 1956) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\rho w b^2\right) = 2\rho_0 b u_e$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\rho w^2 b^2\right) = (\rho_0 - \rho) g b^2$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((\rho_0 - \rho) w b^2\right) = 0$$

- Modèle de fermeture :
  - $u_e = \alpha w$ (Boussinesq)
  - $u_e = \alpha\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}w$ (non-Boussinesq)
- Traitement similaire des deux cas si :

$$\eta = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}b$$



- Solutions similaires (point source) :

$$w = \left(\frac{25}{48\pi\alpha^2}\right)^{1/3} B^{1/3} z^{-1/3}$$
$$\beta = \frac{6\alpha}{5} z$$
$$\eta = \frac{1}{3g}\left(\frac{25}{6\pi\alpha^2}\right)^{2/3} B^{2/3} z^{-5/3}$$

où $B = \dfrac{\Delta\rho_i}{\rho_0} g\pi b_i^2 w_i =$ constante

- Singularités en $z = 0 \Rightarrow$ Introduction d'un décalage vertical (origine virtuelle z_v)
- Calage possible sur 1 seule variable
  $\Rightarrow$ distorsion des deux autres

- Introduction de la fonction $\Gamma = \dfrac{5g\eta\beta}{8\alpha w^2} = \dfrac{\text{Flottabilité}}{\text{Inertie}}$ ($\rightarrow$ 1 à l'infini)

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\rho w b^2\right) = 2\rho_0 b u_e \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\rho w^2 b^2\right) = (\rho_0 - \rho) g b^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((\rho_0 - \rho) w b^2\right) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{w}{w_i} = \left(\dfrac{\Gamma_i}{\Gamma}\right)^{1/2}\left(\dfrac{1-\Gamma}{1-\Gamma_i}\right)^{1/10} \\ \dfrac{\beta}{\beta_i} = \left(\dfrac{\Gamma}{\Gamma_i}\right)^{1/2}\left(\dfrac{1-\Gamma_i}{1-\Gamma}\right)^{3/10} \\ \dfrac{\eta}{\eta_i} = \left(\dfrac{\Gamma_i}{\Gamma}\right)^{1/2}\left(\dfrac{1-\Gamma}{1-\Gamma_i}\right)^{1/2} \end{array}\right.$$

- Reste à intégrer (resp. si $\Gamma_i > 1$ ou si $\Gamma_i < 1$)

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{1}{\Lambda_i}\Gamma^{1/2}(\Gamma - 1)^{13/10} \text{ (Lazy) ou } \dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{\Lambda_i}\Gamma^{1/2}(1 - \Gamma)^{13/10} \text{ (Forced)} \\ \\ \Gamma(z=0) = \Gamma_i \quad \text{et} \quad \Lambda_i = \dfrac{\beta_i |\Gamma_i - 1|^{3/10}}{4\alpha \Gamma_i^{1/2}} = [\mathrm{L}] \end{array}\right.$$

- Pb : l'intégration de Γ n'est pas analytique $\rightarrow$ Recours à la MDAR

- Equation à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\zeta} = -\Gamma^{1/2}(\Gamma - 1)^{13/10} \quad \text{où} \quad \zeta = z/\Lambda_i \,, \\ \\ \Gamma(\zeta = 0) = \Gamma_i \gg 1 \quad \text{et de fait} \quad \lim\limits_{\zeta \to \infty} \Gamma \to 1 \end{array} \right.$$

- Approche intuitive : on pose $\Gamma \simeq 1 + \varepsilon(\zeta)$ où $\varepsilon(\zeta) \ll 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\zeta} = -\varepsilon^{13/10} + O(\varepsilon^{23/10}) \\ \\ \varepsilon \to 0 \quad \text{lorsque} \quad \zeta \to \infty \,. \end{array} \right.$$

- Solution immédiate : $\varepsilon = \dfrac{3}{10}\,\zeta^{-10/3} + O(\varepsilon^{13/10})$
- Pb : Invariance de la solution par tout changement de variable de la forme $\zeta' = \zeta - \zeta_v$... (origine virtuelle, divisée ici par Λ_i)

- Proposition d'une meilleur approximation : $\Gamma = \dfrac{1 + a\,\varepsilon(\zeta)}{1 - b\,\varepsilon(\zeta)}$
- Ce qui nous conduit à

$$\begin{cases} (a+b)^{-3/10}\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\zeta} = -\dfrac{(1+a\,\varepsilon)^{1/2}}{(1-b\,\varepsilon)^{-1/5}}\,\varepsilon^{13/10}\,, \\ \\ \varepsilon \to 0 \quad \text{lorsque} \quad \zeta \to \infty\,. \end{cases}$$

- Développement en série :

$$\frac{(1+a\,\varepsilon)^q}{(1-b\,\varepsilon)^{q+r-2}} = 1 + \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{5}\,b\right)\,\varepsilon + O(\varepsilon^2)\,,$$

- Si a et b vérifient : $a + b \neq 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{5}\,b = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\zeta} = -(a+b)^{3/10}\varepsilon^{13/10} + O(\varepsilon^{33/10}) \qquad \text{contre } O(\varepsilon^{23/10})$$

Champ lointain : $\Gamma \to 1$

- Finalement, nous obtenons :

$$\Gamma_{\text{outer}} \simeq \frac{7 + 2\left(\dfrac{10\Lambda_i}{3(z - z_v)}\right)^{10/3}}{7 - 5\left(\dfrac{10\Lambda_i}{3(z - z_v)}\right)^{10/3}}$$

- A ce stade, solution inutilisable tant que z_v n'est pas déterminée...

- Γ_{outer} n'est valable que lorsque sa valeur est proche de 1, c'est à dire loin de la source...

$\hookrightarrow$ Pour déterminer z_v il faut procéder à un raccordement avec une solution Γ_{inner} valable près de la source

Champ proche : $\Gamma \simeq \Gamma_i \gg 1$

- Retour à l'équation de départ :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\zeta} = -\Gamma^{1/2}(\Gamma - 1)^{13/10} \quad \text{où} \quad \zeta = z/\Lambda_i \,, \\[2ex] \Gamma(\zeta = 0) = \Gamma_i \gg 1 \quad \text{et de fait} \quad \lim\limits_{\zeta \to \infty} \Gamma \to 1 \end{cases}$$

- Dév. en perturbation : $\epsilon = 1/\Gamma_i \ll 1$ et normalisation : $\gamma = \Gamma/\Gamma_i = \epsilon\,\Gamma$

$$\begin{cases} \epsilon^{4/5} \dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\zeta} = -\gamma^{1/2}(\gamma - \epsilon)^{13/10} \\[2ex] \gamma(\zeta = 0) = 1 \end{cases}$$

- Démarche habituelle :
  - On injecte : $\gamma = \gamma_0 + \epsilon\,\gamma_1 + \epsilon^2\,\gamma_2 + \ldots + \epsilon^n\,\gamma_n$,
  - Puis on identifie les puissances semblables de ϵ
- Pb : puissance non entière de ϵ... Nécessité de dilater la variable spatiale

- Dilatation de la variable spatiale : $\chi = \left(1 + \frac{4}{5}\epsilon^{-4/5}\zeta\right)^{-1/4}$.
- Cela nous conduit à :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\chi^5}{5}\,\dfrac{d\gamma}{d\chi} = \gamma^{1/2}(\gamma - \epsilon)^{13/10} \\[2ex] \gamma(\chi = 1) = 1 \end{array}\right.$$

- Recherche de la solution sous la forme : $\gamma = \gamma_0 + \epsilon\,\gamma_1 + \epsilon^2\,\gamma_2 + \ldots + \epsilon^n\,\gamma_n$,
- Obtention d'une cascade de systèmes différentiels de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\gamma_0}{d\chi} = f_0(\chi,\ \gamma_0) \\[2ex] \gamma_0(\chi = 1) = 1 \end{array}\right. ; \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\gamma_1}{d\chi} = f_1(\chi,\ \gamma_0,\ \gamma_1) \\[2ex] \gamma_1(\chi = 1) = 0 \end{array}\right. ; \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\gamma_2}{d\chi} = f_2(\chi,\ \gamma_0,\ \gamma_1, \gamma_2) \\[2ex] \gamma_2(\chi = 1) = 0 \end{array}\right.$$

etc ...

- A titre d'exemple, quelques premiers termes :

$$\gamma_0 = \chi^5$$
$$\gamma_1 = \frac{13}{18}(1-\chi^9)$$
$$\gamma_2 = \frac{169}{360}\chi^{13} - \frac{299}{560}\chi^9 + \frac{65}{1008}\frac{1}{\chi^5}$$
$$\ldots$$

et finalement : $\Gamma_{\text{inner}} = \Gamma_i\,\gamma_0 + \gamma_1 + \frac{1}{\Gamma_i}\,\gamma_2 + \ldots$

Résultats importants pour la suite

- Quel que soit le nombre de termes retenus, la solution "inner" diverge lorsque $\Gamma_i\chi^5$ devient plus petit que 1...
- Lorsque $\chi \to 1/\Gamma_i{}^{1/5}$, $\Gamma_{\text{inner}} \to I$ (constante pure)
- La condition $\chi \to 1/\Gamma_i{}^{1/5}$ fournit la plus grande valeur de ζ pour laquelle Γ_{inner} est valable

- Critère de raccordement : $\lim\limits_{\chi \to 1/\Gamma_i^{1/5}} \Gamma_{\text{inner}} = \lim\limits_{\zeta \to (5/4)(1-\Gamma_i^{-4/5})} \Gamma_{\text{outer}}$

$\hookrightarrow$ Eq. algébrique dont la résolution nous fournit *in fine* z_v.

Résultats finaux

- Champ proche :

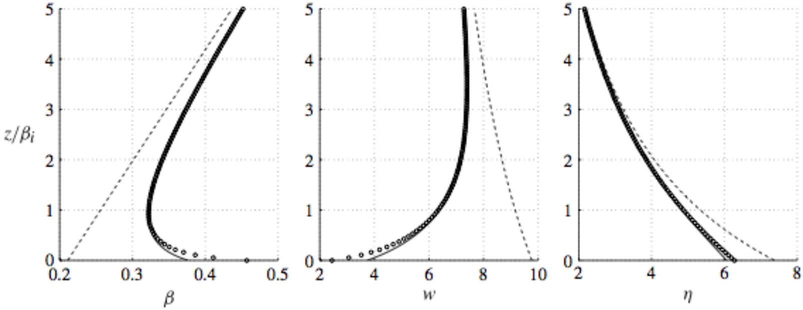
$$\Gamma_{\text{inner}} = \Gamma_i \, \gamma_0(\chi) + \gamma_1(\chi) + \frac{1}{\Gamma_i}\gamma_2(\chi) + \left(\frac{1}{\Gamma_i}\right)^2 \gamma_3(\chi) + O\left(\Gamma_i^{-3}\right)$$

où $\chi = \left(1 + (4/5)\, \Gamma_i^{4/5}\, z/\Lambda_i\right)^{-1/4}$.

- Champ lointain : $\Gamma_{\text{outer}} \simeq \dfrac{7 + 2\left(\dfrac{10\,\Lambda_i}{3\,(z - z_v)}\right)^{10/3}}{7 - 5\left(\dfrac{10\,\Lambda_i}{3\,(z - z_v)}\right)^{10/3}}$

où $$\frac{z_v}{\beta_i} \simeq \frac{(\Gamma_i - 1)^{3/10}}{4\alpha\Gamma_i^{1/2}} \left(\frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{\Gamma_i^{4/5}}\right) - 4.1091\right)$$

- Reconstruction des variables avec Γ_{outer} :



Données : $\Gamma_i = 10$, $w_i = 3.74$ m/s, $\beta_i = 0.38$ m et $\eta_i = 6.06$

$\hookrightarrow$ La solution Γ_{outer} seule donne un modèle meilleur que les solutions similaires, notamment en champ proche

Conclusions

- Généralisation immédiate aux cas des panaches très forcés ($\Gamma_i \ll 1$) : $\Gamma' = \dfrac{1}{\Gamma}$ (modification de quelques coefs.)
- Dans les deux cas la solution complète $\Gamma_{\text{inner}} \cup \Gamma_{\text{outer}}$ donne des résultats très précis à condition que $\Gamma_i \gg 1$ ou $\Gamma_i \ll 1$...

$\hookrightarrow$ En pratique l'erreur commise reste inférieure à 1% pour $\Gamma_i \gtrsim 5$ et $\Gamma_i \lesssim 0.2$

- Lorsque $\Gamma_i \simeq 1$, solution "outer" reste valable près de la source

  $\hookrightarrow$ nouveau critère de détermination de l'origine virtuelle :

$$\Gamma_{\text{outer}}(\zeta = 0) = \Gamma_i$$

$\Rightarrow$ Cette autre solution est valable pour les Γ_i complémentaires

---

F. Candelier & O. Vauquelin, "Matched Asymptotic Solutions for Turbulent Plumes".

J. Fluid Mech. 2012